Antonio Carlos Zambroni de Souza
Carlos Alberto Murari Pinheiro

Introdução à Modelagem, Análise e Simulação de

Sistemas Dinâmicos

EDITORA INTERCIÊNCIA

Modelar e analisar a resposta de um sistema dinâmico a determinadas condições, constitui o núcleo de boa parte dos estudos de Engenharia.

As motivações dos estudos dos conceitos apresentados neste livro podem ser diversas.

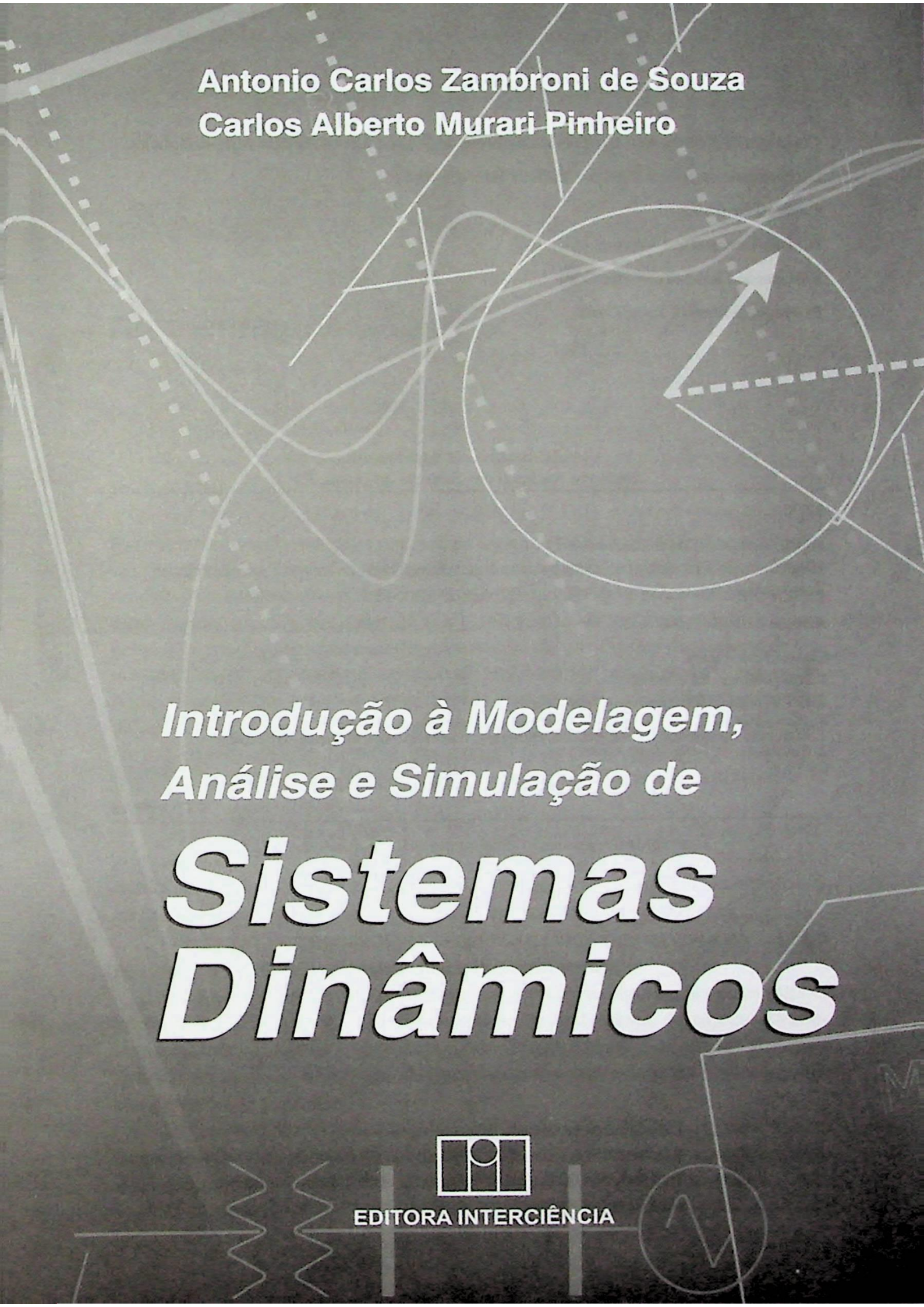
Um aluno certamente precisará destes conceitos quando lidar com teorias de sistemas de controle, por exemplo, ou então quando for analisar a resposta transitória ou de longo termo de um sistema elétrico de potência, plantas petroquímicas, etc.

Introdução à Modelagem,
Análise e Simulação de

Sistemas Dinâmicos

Antonio Carlos Zambroni de Souza
Carlos Alberto Murari Pinheiro

Introdução à Modelagem, Análise e Simulação de Sistemas Dinâmicos



EDITORA INTERCIÊNCIA

Copyright © 2008 by Antonio Carlos Zambroni de Souza e Carlos Alberto Murari Pinheiro

Direitos reservados em 2008 por **Editora Interciência Ltda.**

Capa: denisekosta

Revisão Ortográfica: Viviane Alves

Editoração Eletrônica: Catia Costa

Produção Editorial: Jorge Gama

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

S713i

Souza, Antonio Carlos Zambroni de
Introdução à modelagem, análise e simulação de sistemas dinâmicos / Antonio Carlos Zambroni de Souza, Carlos Alberto Murari Pinheiro. - Rio de Janeiro : Interciência, 2008.

Anexos

Contém exercícios
Inclui bibliografia e índice
ISBN 978-85-7193-188-6

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Pinheiro, Carlos Alberto Murari. II. Título.

08-1906. CDD: 515.3

CDU: 517.9

É proibida a reprodução total ou parcial, por quaisquer meios,
sem autorização por escrito da editora.

www.editorainterciencia.com.br

Editora Interciência Ltda.
Rua Verna Magalhães, 66 – Engenho Novo – Rio de Janeiro – RJ – 20710-290
Tel.: (21) 2581-9378/2241-6916 – Fax: (21) 2501-4760
e-mail: vendas@editorainterciencia.com.br

Apresentação

Este livro se propõe a ocupar um espaço importante na formação dos alunos de vários cursos de Engenharia. Conceitos fundamentais sobre Sistemas Dinâmicos são essenciais para o entendimento adequado de tópicos relacionados à modelagem, análise, ao controle e à estabilidade de sistemas dinâmicos em geral. Ocorre que modelar e analisar a resposta de um sistema dinâmico a determinadas condições constitui o núcleo de boa parte dos estudos de Engenharia. As motivações dos estudos dos conceitos apresentados nesse livro podem ser diversas. Um aluno certamente precisará desses conceitos quando lidar com teorias de sistemas de controle, por exemplo, ou então quando for analisar a resposta transitória ou de longo termo de um sistema elétrico de potência ou de plantas petroquímicas, etc.

Nos capítulos desse livro, o leitor encontrará alguns exercícios de sedimentação de conceitos. Alguns devem ser realizados manualmente, em outros, serão sugeridos o uso de pacotes computacionais de forma a permitir ao aluno desenvolver de maneira mais ampla suas potencialidades.

O capítulo 1 apresenta algumas definições importantes que serão usadas nos capítulos subseqüentes.

O capítulo 2 desse livro oferece uma revisão de alguns conceitos importantes. Assim, uma revisão sobre transformada de Laplace, equações diferenciais e álgebra linear será apresenta. Uma introdução ao conceito de variáveis de estado é também oferecida. Essas revisões formam a base do entendimento dos capítulos seguintes.

O capítulo 3 apresenta o problema de modelagem de sistemas físicos. Sistemas elétricos, mecânicos, térmicos, químicos e outros são apresentados e discutidos. Muitos sistemas são modelados através de conhecimentos relacionados a áreas da física, química, biologia, etc. Esse tipo de modelagem é chamado

de modelagem fenomenológica ou conceitual, modelagem pela física ou natureza do sistema, também chamada de modelagem "caixa branca". Nesses tipos de modelos, é necessário conhecer certos detalhes ou propriedades do sistema a ser modelado. Essas propriedades são representadas por relações entre os parâmetros e as variáveis pertinentes aos fenômenos envolvidos no sistema. Essas relações são expressas por equações diferenciais, funções de transferência, variáveis de estado, etc. Obtidas essas expressões, pode-se estudar o comportamento de um sistema sem a necessidade de acessar o sistema real, utilizando apenas suas expressões matemáticas resolvidas através de métodos analíticos ou numéricos. Atualmente, vários programas computacionais estão disponíveis comercialmente para simular numericamente sistemas dinâmicos em microcomputadores pessoais. Isso permite análises e estudos de diversas características de sistemas dinâmicos de uma maneira rápida e eficiente. Representações em diagramas de blocos de equações diferenciais serão vistas. Essas representações são interessantes quando se almeja simulações computacionais.

De posse dos conceitos fundamentais e da modelagem, algumas técnicas de análise são discutidas no capítulo 4. Discussões importantes a respeito das metodologias apresentadas são desenvolvidas.

O capítulo 5 aborda o problema de resposta básica dos sistemas dinâmicos. Neste capítulo, serão mostradas as respostas típicas de sistemas de primeira e segunda ordem que modelam muitos sistemas físicos reais. Respostas típicas no domínio do tempo e da freqüência serão apresentadas. Conceitos, como constante de tempo, fator de amortecimento, freqüência natural de oscilação, e outros, serão apresentados. Considerações sobre aproximações de sistema de ordem superior estão disponíveis nesse capítulo, assim como simulações de sistemas dinâmicos com condições iniciais não-nulas.

O capítulo 6 traz uma introdução ao problema de identificação de sistemas. Sistemas complexos ou do tipo "caixa preta", para os quais não se tem acesso fácil às partes constituintes dos mesmos, são onerosos para se obter a modelagem fenomenológica. Nesses casos, a utilização de métodos de identificação de sistemas pode levar a soluções eficientes na obtenção de modelos. Praticamente, não é necessário conhecimento prévio do sistema, bastando informações de medidas das suas entradas e saídas, onde a partir do processamento dos dados medidos, obtêm-se os coeficientes ou parâmetros das equações que modelam esses sistemas. Técnicas básicas de estimação de parâmetros baseadas no método dos mínimos quadrados serão mostradas. Mesmo para sistemas dinâmicos facilmente modelados fisicamente, o emprego de técnicas de identificação pode ser interessante em termos práticos, uma vez que modelos matemáticos podem ser obtidos de maneira relativamente rápida e precisa a partir de medidas experimentais. Alguns exemplos numéricos servirão de ilustração.

Prefácio

O meio acadêmico é rico em buscar alternativas próprias para embasar o conteúdo das ementas das disciplinas ministradas nos mais variados cursos. Livros e materiais didáticos de excelente qualidade permeiam as bibliotecas das grandes instituições de ensino que prezam pela valorização e, por que não, pela autenticidade, pelo desempenho e pelo aprimoramento de uma base sólida que guiará o aluno para além das fronteiras do campus universitário. No entanto, poucos têm o privilégio, ou mesmo, o desprendimento, pois uma obra não sai do mero desejo de articulá-la. Surge da vivência, da experiência e, sem dúvida alguma, da persistência dos autores.

Notadamente, em cursos de Engenharia, há um ambiente propício e fecundo para se fazer brotar o desejo de compartilhar um trabalho em equipe. Citamos a Engenharia, pois, desde o curso fundamental, os alunos percebem a necessidade do trabalho em grupo das listas complicadas de exercícios trocadas com os demais colegas, das notas de rodapé que passam despercebidas da aula que deixou dúvidas e que nem sempre o professor foi capaz de dirimi-las a tempo, contudo, o colega mais atento conseguiu absorver e compreender e, assim, dividir o seu entendimento com o grupo. Por aí vai esse caminhar, às vezes penoso e repleto de percalços, porém gratificante e, sem dúvida, incomparável e imemorável.

Desde as noções básicas do Cálculo, aprende-se que a representação ou modelo, como sugerem alguns textos, constitui a essência e o fundamento da abordagem lógica do ensino de Engenharia. Apresentar uma obra que emprega em seus capítulos e seções uma preocupação com a qualidade, aliada à didática e ao conteúdo da abordagem, merece um elogio entusiástico e

muitíssimos aplausos. Abordar os Sistemas Dinâmicos de uma maneira clara, objetiva, de fácil compreensão e numa seqüência lógica atraente, agregam estímulo e prazer aos leitores. Construir uma sucessão de capítulos, que se entrelaçam e se completam e, pouco a pouco, capturam a atenção, sem perder o sentido do todo, capaz de mesclar o amplo espectro intrínseco aos Sistemas Dinâmicos, mostra a preocupação dos autores na elaboração deste excelente livro sobre o assunto.

Num universo de fantásticas obras nacionais e internacionais, temos que parabenizar os professores Antônio Carlos Zambroni de Souza e Carlos Alberto Murari Pinheiro por nos proporcionar um belo e amplo material, com conteúdo riquíssimo, de leitura fácil e extremamente empolgante aos leitores. É, sem dúvida, uma obra que incentiva a todos, especialmente àqueles que se iniciam nos cursos de Engenharia.

B. Isaías Lima Lopes
Paulo Cesar Rosa

Sumário

Capítulo 1

Introdução a Sistemas Dinâmicos 1

1.1 O Problema da Modelagem 1

1.2 Variáveis Dinâmicas Contínuas 2

1.3 Classificação de Sistemas 3

1.4 O Uso de Ferramentas Computacionais 4

1.5 Abordagens Utilizadas neste Livro 4

a) Modelagem do Circuito 6

b) Solução do Sistema de Equações 6

c) Análise da Resposta 6

Capítulo 2

Revisões Fundamentais 9

2.1 Álgebra Linear 9

2.1.1 Introdução 9

Vetores em $\Re^n$ 9

Matrizes 11

2.1.2 Apresentação Geral de Matrizes 12

2.1.3 Autovalores e Autovetores 12

2.1.4 Cálculo de Autovalores e Autovetores para uma Matriz 2 x 2 13

2.1.5 Decomposição de Matrizes 15

2.1.6 Obtenção de Autovalores por meio de Pacotes Computacionais 17

2.1.7 Determinante de uma Matriz 17

Propriedade da Multiplicação 18

Regra de Schur. 18
2.1.8 Confirmação da Decomposição por Autovalores 18
2.1.9 Matriz Singular 19
Inversa e Fatoração de Matrizes 19
Fatoração LU. 19
2.1.10 Revisando Matrizes Singulares 20
2.2 Equações Diferenciais 21
2.2.1 Introdução 21
2.2.2 Definições Fundamentais. 22
Solução. 22
2.2.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem 22
2.2.4 Alguns Exemplos de Problemas de Primeira Ordem 23
Crescimento Populacional 23
Modelo Ecológico de Lotka-Volterra 24
2.2.5 Revisando Equações Diferenciais. 25
2.3 Transformada de Laplace 26
Constante 27
Exponencial Crescente 27
Seno 27
Propriedades Fundamentais. 29
Degrau 30
Rampa ou Integral do Degrau 31
2.4 Variáveis e Equações de Estado 32
2.5 Exercícios 33
2.6 Referências 34

Capítulo 3
Introdução à Modelagem de Sistemas Dinâmicos 35
3.1 Introdução. 35
3.2 Modelagem de Sistemas Elétricos Básicos. 36
Exemplo 3.1 – Circuito RL. 37
Exemplo 3.2 – Circuito RC. 38
Exemplo 3.3 – Circuito RLC 38
Exemplo 3.4 – Circuito de Avanço/Atraso de Fase 39
3.3 Modelagem de Sistemas Mecânicos, Hidráulicos e Térmicos Básicos 41
3.3.1 Sistemas Mecânicos Translacionais. 41
Exemplo 3.5 – Sistema Massa-Atrito. 42
Exemplo 3.6 – Sistema de Amortecimento 43
Exemplo 3.7 – Modelo mais Detalhado 44

3.3.2 Sistemas Mecânicos Rotacionais 47
Exemplo 3.8 – Sistema Inércia-Atrito 48
Exemplo 3.9 – Mecanismo de Posicionamento 49
Exemplo 3.10 – Pêndulo Mecânico 50
Exemplo 3.11 – Sistema de Transmissão Mecânica 52
3.3.3 Sistemas Hidráulicos 54
Exemplo 3.12 – Sistema de Nível 54
Exemplo 3.13 – Sistema de Tanques Acoplados 55
Exemplo 3.14 – Servo-Pistão Hidráulico 57
3.3.4 Sistemas Térmicos 58
Exemplo 3.15 – Sistema de Aquecimento 58
Exemplo 3.16 – Sistema de Aquecimento 60
3.4 Sistemas Químicos 60
Exemplo 3.17 – Coluna de Destilação 61
Exemplo 3.18 – Reator Químico 64
3.5 Sistemas Diversos 66
3.5.1 Controladores Eletrônicos Analógicos 66
Exemplo 3.19 – Controlador PI 67
Exemplo 3.20 – Controlador Derivativo 67
3.5.2 Sistema Servo-Motor Elétrico 68
3.5.3 Sistema de Geração Elétrica 70
3.5.4 Transdutores 73
3.6 Representações em Diagramas de Blocos e Simulações 73
Exemplo 3.21 – Diagrama de Blocos 75
Listagem 3.1 – Pseudocódigo 76
Exemplo 3.22 – Condições Iniciáveis Não-Nulas 77
Exemplo 3.23 – Equações Diferenciais e de Estado 78
Listagem 3.2 – Equações Numéricas 79
3.6.1 Exemplos de Simulações 80
3.7 Exercícios 81
3.8 Referências 85

Capítulo 4
Técnicas de Análise 87
4.1 Introdução 87
4.2 Forma Fatorada 88
4.3 Representação no Plano *S* 88
4.4 Desmembramento de uma Função Imprópria 89
4.5 Desmembramento em Frações Parciais 90

Calculando os Resíduos 90
Frações Parciais com o Uso do Matlab 92
4.6 Determinação da Estabilidade de um Sistema pelo Algoritmo de Routh-Hurwitz 96
Entendendo o Algoritmo 99
Estabilidade Relativa 100
Teoremas do Algoritmo 100
Intervalos de Valores Para Parâmetros de Sistemas de Controle 103
4.7 Modelagem por Variáveis de Estado e Subespaço de Variáveis 106
Dimensão do Sistema de Equações 107
Calculando as Variáveis de Estado de Interesse 109
Solução através de Matlab e Scilab 111
4.8 Variáveis Modais 112
Variáveis Modais em Matlab e Scilab 115
Redundância no Equacionamento 115
4.9 Método Direto de Lyapunov 118
Definições de Estabilidade 119
Teoremas da Estabilidade 121
Teorema da Estabilidade Assintótica 122
Função de Lyapunov para um Sistema Linear 123
Método da Primeira Integral para Sistemas Não-Lineares 126
4.10 Exercícios 127
4.11 Referências 131

Capítulo 5
Respostas Típicas de Modelos de Sistemas Dinâmicos 133
5.1 Introdução 133
5.2 Sistemas de Primeira Ordem 133
Exemplo 5.1 – Resposta ao Degrau 134
5.3 Sistemas de Segunda Ordem 138
Exemplo 5.2 – Respostas Típicas 138
5.4 Sistemas de Ordem Superior e Aproximações 140
Exemplo 5.3 – Aproximação de Primeira Ordem 141
Exemplo 5.4 – Raízes Próximas 142
Exemplo 5.5 – Aproximação de Segunda Ordem 143
Exemplo 5.6 – Ordem Superior 144
Exemplo 5.7 – Descartando Zero 145
Exemplo 5.8 – Desprezando Zero 147
5.5 Exemplos de Simulações 148

5.6 Exercícios 148
5.7 Referências 152

Capítulo 6
Introdução à Identificação de Sistemas Dinâmicos 153
6.1 Introdução 153
6.2 Conceitos Básicos 153
Exemplo 6.1 – Aproximação de Funções 156
Exemplo 6.2 – Identificação de Sistemas 158
Listagem 6.1 – Simulação de Modelo 160
Exemplo 6.3 – Obtenção de Modelo 161
Listagem 6.2 – Comandos para Identificação 162
6.3 Exercícios 163
6.4 Referências 163

Anexo 1
Algumas Propriedades da Transformada de Laplace 165

Anexo 2
Algumas Transformadas de Laplace 167

Índice Remissivo 169

Capítulo 1

Introdução a Sistemas Dinâmicos

1.1 O PROBLEMA DA MODELAGEM

Modelar um sistema físico qualquer significa obter uma representação matemática que permita um estudo analítico coerente com o comportamento do sistema na prática. Assim, os resultados obtidos devem representar, da maneira mais fidedigna possível, o sistema físico analisado. A fase de modelagem é vital, uma vez que o compromisso entre precisão e complexidade do modelo em relação à dificuldade de obtenção da resposta deve ser assumido. A complexidade de se modelar um sistema dinâmico depende fundamentalmente do conhecimento que se tem desse sistema. Por exemplo, o caso de um corpo se movimentando a uma velocidade v_1 (medida em metros por segundo), com massa m_1 (medida em quilogramas) que se choca com um outro corpo em repouso, de massa m_2. A quantidade de movimento medida no instante do choque é dada por: $Q = m_1.v_1$ [kg.m/s].

Se o modelo for ideal, essa mesma quantidade de movimento será transferida ao corpo de massa m_2, de forma que este se deslocará com uma velocidade v_2 dada por $v_2 = Q/m_2$ [m/s].

Um outro problema de modelagem interessante é dado a seguir. Assuma, na figura 1.1, que se deseja determinar a força que se deve aplicar ao caixote de massa $m = 50$ [kg], para que a aceleração obtida seja igual a 10 [m/s^2]. O atrito entre a superfície e o corpo não é desprezível, e é dado por $\mu = 0{,}1$. A constante de gravidade é definida em 10 [m/s^2]. O somatório de forças é dado por $F = F_1 - \mu N = F_1 - 0{,}1.50.10 = F_1 - 50$. Esta resultante deve ser igual à massa do corpo multiplicada pela aceleração do mesmo, de forma que $F_1 - 50 = 50.10$, ou seja, $F_1 = 500 + 50 = 550$ [N].

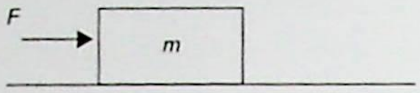


Figura 1.1 Sistema físico corpo-superfície.

Note que a modelagem descrita, apesar de ainda muito simples, requer um conjunto de informações maior do que a requerida pelo primeiro exemplo. Note também que desprezar a constante de atrito entre o corpo e a superfície tende a produzir um resultado diferente. Nesse caso, um resultado otimista (500 [*N*]), já que não se consideraria o atrito a ser vencido. Mas esse resultado não corresponderia à realidade, uma vez que, de fato, existe um atrito.

Basicamente, os estudos de sistemas dinâmicos apresentados neste livro se dividem nas seguintes fases:

- Modelagem. Descrita anteriormente, consiste em representar o sistema físico através de um modelo matemático.
- Determinação das características dinâmicas, que implica em um levantamento prévio de dados, já que propriedades intrínsecas do sistema são consideradas. Como exemplo, pode-se citar inércia, amortecimento, atrito, etc.
- Análise. Consiste em, através de uma metodologia qualquer, analisar a resposta do sistema a uma entrada, excitação ou distúrbio.

1.2 VARIÁVEIS DINÂMICAS CONTÍNUAS

Como citado, modelar um sistema dinâmico é fundamental para análise de seu comportamento frente a uma excitação. Em particular, estaremos lidando com variáveis que, para todo e qualquer instante de tempo, têm valores definidos. Esse tipo de variável é chamado de variável dinâmica contínua, e um exemplo é mostrado na figura 1.2.

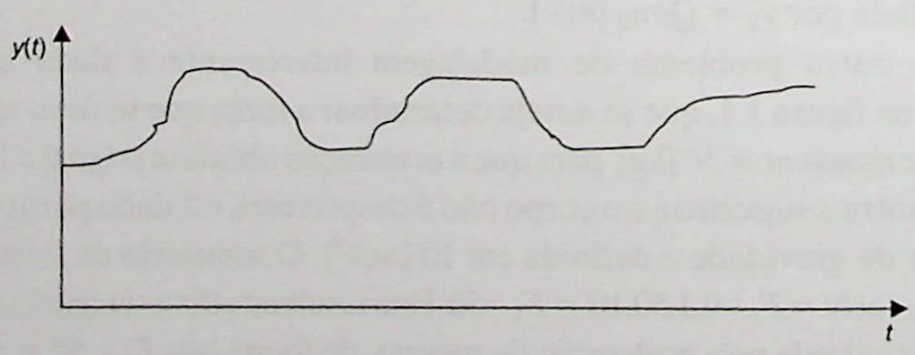


Figura 1.2 Comportamento dinâmico de uma variável contínua.

O objetivo, portanto, é analisar se a variável contínua de interesse tende a um valor finito após a aplicação de uma excitação ou distúrbio. Mais do que isso, deseja-se que qualquer componente transitória desapareça o mais rápido possível. A forma como o sistema reage a alguns tipos de distúrbios define a robustez desse sistema dinâmico. Deseja-se, na verdade, que o sistema atinja um novo ponto de equilíbrio estável o mais rápido possível, ao mesmo tempo em que algumas características da resposta devem ser satisfeitas. Assim, a resposta dinâmica de um sistema pode ser dividida em duas parcelas:

1. Componente de regime permanente, também chamada de valor final. É a componente obtida quando o tempo tende a um valor suficiente para a resposta se acomodar. Portanto, representamos esta componente como

$$y(\infty) = \lim_{t \to \infty} y(t).$$

Nota: observe que na expressão acima, a resposta em um instante qualquer é dada por $y(t)$.

2. Componente transitória. É a parcela da resposta observada imediatamente após a aplicação de um distúrbio. Seu valor é dado por

$$y_t(t) = y(t) - y(\infty).$$

A classificação dos tipos de respostas é também um conceito importante.

- Resposta livre: É a saída obtida quando não se considera qualquer excitação ao sistema.
- Resposta forçada: É a resposta obtida para uma determinada excitação, considerando nulas as condições iniciais.
- Resposta total: É a união das respostas anteriores.

1.3 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Uma vez apresentados os tipos de respostas, devemos apresentar os tipos de sistemas existentes. Antes disso, porém, é importante definir alguns elementos importantes nesta classificação:

- Variáveis de estado são aquelas que definem a condição operativa de um sistema dinâmico. Essas variáveis dependem do sistema dinâmico

analisado, podendo ser, por exemplo, a corrente em um circuito elétrico, a velocidade ou inclinação de um corpo, etc.

- Variáveis de perturbação são aquelas que tendem a mudar o ponto operativo de um sistema, podendo ser interpretadas como um distúrbio.
- Variáveis de controle são aquelas que permitem manter o sistema dinâmico, operando dentro de algumas condições pré-especificadas.

Assumindo x como o vetor de variável de estados, u o vetor de entrada (ou perturbação) e t como o tempo (um escalar), temos:

a) $\dot{x} = f(x,u,t)$. Sistema não linear, dependente do tempo e forçado.

b) $\dot{x} = f(x,t)$. Sistema não linear, dependente do tempo e não forçado.

c) $\dot{x} = f(x,u)$. Sistema não linear, não dependente do tempo e forçado.

d) $\dot{x} = f(x)$. Sistema não linear ou linear, não dependente do tempo e não forçado.

Sistemas do tipo (d) são também chamados de autônomos. Esta classe de sistema será especialmente estudada neste livro.

1.4 O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

A solução numérica de modelos de sistemas dinâmicos ou a simulação computacional dos mesmos é facilmente realizada através de softwares comerciais, havendo bons pacotes de ferramentas computacionais atualmente. Em alguns capítulos deste serão mostrados exemplos que fazem o uso do pacote computacional Matlab (da MathWorks Inc) e Scilab (*software* livre disponível em www.scilab.org). A razão de se usar estes programas reside no fato de os mesmos serem bastante simples e robustos. Possuem uma quantidade ampla de comandos amigáveis pré-definidos de uso direto e também permitem desenvolver programas aplicativos de uma forma muito fácil por meio do encadeamento de comandos ou funções específicas.

1.5 ABORDAGENS UTILIZADAS NESTE LIVRO

Nos desenvolvimentos e exemplos apresentados deste texto se tentará manter uma abordagem mais didática e direta possível, utilizando-se sempre que possível de ilustrações, equações e explicações pertinentes.

A maioria dos conceitos que serão apresentados neste texto é proveniente de áreas diversas da matemática, física, química, etc., e de modo algum, pretende-se que o mesmo venha substituir os livros textos das áreas afins. Apesar de algumas revisões presentes neste material, para um bom aproveitamento deste livro, é importante que os leitores tenham os conhecimentos básicos necessários adquiridos em cursos de cálculo, física, etc.

O exemplo a seguir ilustra o relacionamento de diversos conceitos de áreas da matemática, física e outras para realizar os procedimentos básicos na modelagem de sistemas dinâmicos. Seja o sistema elétrico ilustrado na figura 1.3.

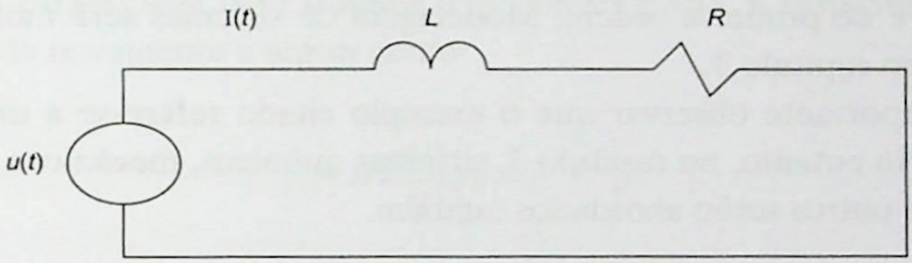


Figura 1.3 Circuito elétrico do tipo *RL*.

Este sistema é regido pela seguinte equação:

$u(t) = R\,I(t) + L\,\dfrac{dI(t)}{dt}$, em que o termo $\dfrac{dI(t)}{dt}$ representa a derivada da corrente I em relação ao tempo t que circula neste circuito.

A solução da equação acima depende de uma parcela transitória e de uma outra de regime permanente, de forma que a resposta total é dada por

$$I(t) = \frac{\mu(t)}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

A parcela exponencial refere-se à resposta transitória, enquanto que a primeira parcela refere-se ao regime permanente. Note que as seguintes características devem ser explicitadas:

- A parcela de regime transitório é assim chamada porque na medida em que o tempo evolui, essa parcela tende a zero.
- A parcela de regime permanente é aquela que se mantém após a resposta transitória cessar.

As afirmativas anteriores, todas válidas, trazem consigo uma série de conceitos implícitos que devem ser desmembrados. As seguintes etapas foram desenvolvidas de forma a apresentar o exemplo:

A) MODELAGEM DO CIRCUITO

Esta fase é a responsável por traduzir matematicamente um sistema físico. O conhecimento dessa fase é fundamental para a análise do sistema, e seu aprendizado fornece ao leitor condições de tirar conclusões imediatas a partir de uma inspeção do processo. Por exemplo, para o sistema da figura 1.3, somente o indutor tem condições de armazenar energia, já que o resistor R é um elemento dissipativo. Elementos armazenadores de energia são traduzidos por equações diferenciais, e como o sistema da figura 1.3 tem somente um elemento desta natureza, sabemos, *a priori*, que a equação que representa sua dinâmica é de primeira ordem. Modelagem de sistemas será mostrada em detalhes no capítulo 3.

É importante observar que o exemplo citado refere-se a um sistema elétrico. No entanto, no capítulo 3, sistemas químicos, mecânicos, térmicos, elétricos e outros serão abordados também.

B) SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Como dito acima, o sistema da figura 1.3 está associado a uma equação de primeira ordem. Mesmo esta solução, embora trivial, necessita de um conhecimento básico de equações diferenciais. Esta formulação pode-se complicar um pouco mais, na medida em que novos armazenadores de energia forem considerados. Neste caso, para cada armazenador, a ordem da equação representativa do sistema aumenta também em um. Por exemplo, dois armazenadores de energia produzirão uma equação representativa de ordem 2, e assim sucessivamente. Para uma dimensão elevada, representações matriciais podem ser necessárias. Assim, o leitor deve ter um conhecimento de Álgebra Linear, para lidar com estes conceitos fluentemente. De forma a fornecer ao leitor uma forma rápida de consulta, o capítulo 2 é devotado a uma revisão de Álgebra Linear. Conceitos importantes para o entendimento deste livro são mostrados, e alguns exercícios são resolvidos e outros propostos.

C) ANÁLISE DA RESPOSTA

A obtenção da resposta dinâmica do sistema pode se dar através de diversas metodologias. Pode-se mesmo dizer que todas as teorias tendem a produzir os mesmos resultados, caso a utilização de cada técnica seja adequada. O capítulo 4 vai abordar as diferentes técnicas de análise adotadas neste livro. No entanto, é de fundamental importância que o leitor perceba que cada vez mais, programas computacionais estarão disponíveis no mercado, gerando, de forma cada vez mais rápida e confiável, as respostas dinâmicas dos sistemas

estudados. Isso, em princípio, seria um desestímulo para o jovem Engenheiro iniciante na carreira, já que este procedimento pode ser substituído por uma máquina. No entanto, a análise crítica dos resultados obtidos depende do conhecimento do Engenheiro, e esta é uma tarefa bastante complexa que geralmente não é factível de ser totalmente automatizada por um computador.

Nota-se na resposta obtida, para o sistema da figura 1.3, que diversos elementos desempenham um papel na resposta do sistema, ainda que esse sistema mostrado seja bem simples. Por conveniência, a resposta obtida é reproduzida novamente a seguir como

$$I(t) = \frac{u(t)}{R}\left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

A resposta acima mostra que o comportamento da corrente elétrica que flui no circuito elétrico depende dos seguintes fatores:

- Tipo e amplitude da excitação ou entrada $u(t)$. Essa excitação, às vezes, denominada fonte, será aqui chamada de distúrbio. Há diferentes tipos de distúrbios e, para cada um, uma resposta dinâmica diferente é obtida. De forma a comparar o desempenho de sistemas dinâmicos diferentes, muitas vezes aplica-se a esses sistemas o mesmo distúrbio ou entrada. Os possíveis tipos de distúrbio serão apresentados neste livro, e respostas dinâmicas a um distúrbio em particular chamado "degrau", serão analisadas.

- Valor da resistência R. Este componente desempenha um papel importante nas duas parcelas da resposta. Assim, em relação à resposta de regime permanente, quanto maior o valor de R, menor o valor da corrente I. No entanto, esse componente também influencia a resposta transitória. Será mostrado que o valor da resistência R desempenha um papel importante no tempo e que a resposta transitória tende a desaparecer. Um caso interessante que o leitor é convidado a refletir refere-se à possibilidade da resistência R ter valor nulo. Essa situação tende a produzir uma resposta transitória incessante, o que não é desejável.

- Valor da indutância L. Neste caso, somente a componente transitória é afetada, o que implica também em um maior, ou menor, tempo de acomodação da resposta.

- Sinal dos elementos. Para o caso analisado, sabe-se que a resistência R e a indutância L têm valores positivos, e isso se traduziu em uma componente exponencial negativa, indicando que esta resposta tende a desaparecer quanto o tempo aumentar. Note, no entanto, que se o sinal da exponencial for positivo, a resposta transitória tende a crescer com o avanço do tempo, e a resposta total será instável. Este caso será também mostrado no capítulo 4.
- Mudança de comportamento. Se o sistema acima estiver associado a um elemento físico real, é possível que a corrente elétrica tenha que satisfazer a algumas condições de regime transitório e de regime permanente. Caso essas condições não sejam satisfeitas, o Engenheiro deve alterar o sistema físico analisado. Isso pode não ser trivial em alguns casos, e algumas situações serão mostradas no capítulo 4.

Como visto nos parágrafos anteriores, a análise da resposta dinâmica do sistema requer conhecimentos bastante importantes, que devem ser fornecidos gradativamente ao estudante. Dessa forma, pretende-se abordar neste livro problemas que despertem a atenção do leitor, o que é feito através de uma linguagem que o encoraje a pesquisar as razões de um sistema estar associado à respostas diferentes quando sujeito a situações diferentes. Este conhecimento vai permitir também atuar nesse sistema, de forma a melhorar seu desempenho. Esse tipo de abordagem também é explorado no livro.

A complexidade dos sistemas analisados não é grande, uma vez que o aluno será ainda apresentado, em cursos subseqüentes, a teorias que permitirão uma abordagem mais sofisticada do problema. No entanto, sem os conhecimentos apresentados nesta fase, o aluno não conseguirá explorar de forma satisfatória todas as possibilidades disponíveis. Recomenda-se, portanto, especial atenção aos itens mostrados neste material, pois foram concebidos para dar ao aluno ferramenta suficiente para prosseguir seus estudos na área de estabilidade e controle de sistemas dinâmicos.

Capítulo 2

Revisões Fundamentais

De forma a ajudar o leitor a compreender de uma forma mais simples os conceitos dos capítulos seguintes, uma revisão a respeito de alguns assuntos será apresentada. Os tópicos abordados neste capítulo são:

- Álgebra linear.
- Equações diferenciais.
- Transformada de Laplace.

Esses tópicos são escolhidos por serem de fundamental importância em estudos de sistemas dinâmicos. Pode-se mesmo dizer que a modelagem de sistemas dinâmicos não é possível sem o conhecimento desses assuntos. A forma como cada teoria será empregada aqui será descrita nos momentos apropriados, nos capítulos subseqüentes.

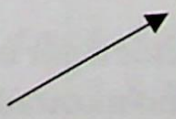
2.1 ÁLGEBRA LINEAR

2.1.1 INTRODUÇÃO

VETORES EM $\Re^N$

Vetores estão associados a medidas que não podem ser inteiramente identificadas por um número real. Medidas indicadas puramente por um número real possuem apenas magnitude. Logo, se além de uma magnitude, for necessário indicar uma direção, um número real já não será suficiente. Neste sentido será introduzido o conceito de vetor.

Um vetor tem um módulo (tamanho) e uma direção como mostrado a seguir.



De forma a se permitir trabalhar com diversos vetores, uma origem se faz necessária. O leitor certamente é familiar com a representação de pontos em um plano Cartesiano através de pares de números reais. Assim, estabelecendo o ponto (0, 0) como origem, pode-se medir a magnitude do vetor como a distância entre a sua extremidade e o ponto (0, 0). Isso nos remete imediatamente ao conceito de distância Euclidiana. A distância entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Logo, a magnitude de um vetor é dada pela distância entre a extremidade e a origem. Sua inclinação é dada pelo ângulo definido pelo vetor e o eixo horizontal associado à origem, como mostrado a seguir na figura 2.1.

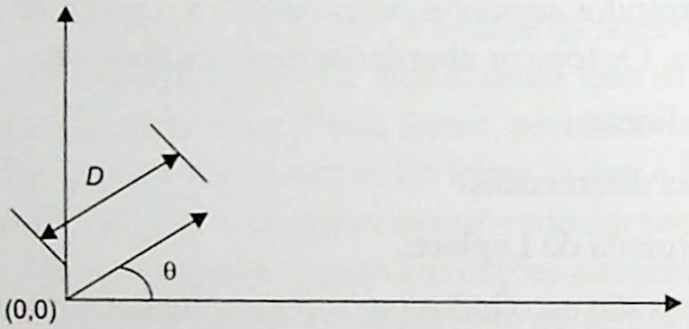


Figura 2.1 Representação de um vetor.

Dois outros pontos importantes associados a vetores são mostrados referentes a propriedades com vetores:

1. A adição de dois vetores é obtida pela lei do paralelogramo, como indicado a na figura 2.2.

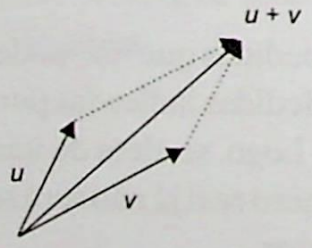


Figura 2.2 Adição de dois vetores.

2. A multiplicação de um vetor u por um escalar k produz um vetor v na mesma direção de u, como mostrado na figura 2.3.

Figura 2.3 Multiplicação de um vetor por um escalar.

Estes conceitos serão importantes mais adiante, para a definição de espaço vetorial. Antes, porém, a representação numérica de um vetor deve ser apresentada, já que a representação geométrica já foi dada. Assuma que extremidade do vetor representado na figura 2.1 seja dada pelo ponto (2, 2). Dessa forma, a distância Euclidiana deste ponto à origem é dada por $\sqrt{8}$, o que fornece o módulo deste vetor. O ângulo desse vetor com a abscissa é dado por

$$cos^{-1} = \frac{2}{\sqrt{8}} = 0{,}7854 \text{ radianos, ou 45 graus.}$$

A representação desse vetor é dada por

$$V = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que esse vetor está definido em $\Re^2$. Assim, esse vetor deve conter uma contribuição de cada dimensão. Neste caso, o mesmo possui uma dimensão associada a ordenada (componente 2), e outra associada a abscissa (componente 2). Logo, para um vetor na dimensão $\Re^n$ é necessário que existam n componentes (ou linhas) representando esse vetor. A seguir, o conceito de matrizes é apresentado.

MATRIZES

Quando se trabalha com sistemas de equações lineares, é importante organizar as equações correspondentes de uma forma que facilite a manipulação dos seus coeficientes. A forma retangular, comumente chamada de matriz e mostrada abaixo com a denominação A, contém importantes características que serão discutidas agora.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Em geral, dizemos que uma matriz tem dimensão $n \times m$, onde n representa o número de linhas e m o número de colunas. Um elemento A_{ij} representa o elemento da linha i e coluna j da matriz A. A propriedade fundamental da adição entre duas matrizes estabelece basicamente que elas devem ter as mesmas dimensões $n \times m$, enquanto que a multiplicação entre duas matrizes $A*B$ só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Uma outra propriedade importante refere-se ao fato que, multiplicar uma matriz por um escalar, é equivalente a multiplicar todos os elementos da matriz pelo escalar. A seguir, algumas propriedades importantes de matrizes são apresentadas.

2.1.2 APRESENTAÇÃO GERAL DE MATRIZES

Assuma o conjunto de equações abaixo.

$$2x_1 + 3x_2 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

Nota-se, pelas propriedades expostas anteriormente, que é possível escrever a seguinte notação:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, deseja-se resolver o sistema de equações $Ax = b$. Esta solução merecerá tratamento especial adiante. Por ora, alguns outros conceitos importantes serão revisados.

2.1.3 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma matriz A, deseja-se achar um escalar λ tal que o produto desse escalar pelo vetor x produza o mesmo vetor v obtido pelo produto $A\ x$. Portanto:

$$A\,x = v;$$

$$\lambda\,x = v.$$

Logo, $A\,x = \lambda\,x$.

O escalar λ é chamado de autovalor de A, e x é um autovetor de A. Tal conjunto de equações pode ser escrito como:

$$(Ax - \lambda x) = 0.$$

Ou

$$(A - \lambda I)\, x = 0.$$

Sendo I uma matriz identidade. Como $x \neq 0$, a solução para o sistema acima é dada por:

$$det\,(A - \lambda I) = 0.$$

A expressão acima fornece o polinômio característico da matriz A. Os zeros (ou soluções) do polinômio são os autovalores de A. Portanto, se todos os autovalores são distintos, pode-se escrever:

$$\rho(y) = (-1)^n (y - \lambda_1)(y - \lambda_2)\ldots(y - \lambda_n).$$

Onde o determinante de A é dado por $\lambda_1 * \lambda_2 * \ldots * \lambda_n$.

Os autovetores associados a cada λ, i.e., as colunas de x, *definem o espaço vetorial de dimensão* C^n (para o caso complexo), ou R^n (para o caso real), e assim qualquer combinação linear entre as colunas de x está situado sobre C^n ou R^n. Um espaço vetorial, definido, por exemplo, por um conjunto V, contém as duas principais propriedades:

- Dado que $x \in V$ e $y \in V, (x + y) \in V$.
- Dado que $x \in V, kx \in V$, onde k é um escalar.

As propriedades acima estabelecem, portanto, que vetores obtidos a partir de combinação linear de vetores pertencentes ao espaço V, também estarão no mesmo espaço V.

2.1.4 CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES PARA UMA MATRIZ 2X2

Assuma a matriz seguinte.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

A mesma tem o polinômio característico:

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{bmatrix}=0.$$

ou $(1-\lambda)\,(3-\lambda)=0$. Portanto $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=3$.

Calculando os autovetores, vem:

Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0;$$

$0x_1 + 2x_2 = 0;$

$0x_1 + 2x_2 = 0.$

Portanto, x_2 deve ser 0 e $x_1 = k$, obtendo para $k = 1$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2=3$:

$$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0;$$

$-2x_1 + 2x_2 = 0;$

$0x_1 + 0x_2 = 0;$

Portanto, $x_1 = x_2$, obtendo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de autovetores é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.1.5 DECOMPOSIÇÃO DE MATRIZES

Foi visto que a relação $A\,x = \lambda\,x$ fornece um polinômio característico que permite determinar λ e x. x é chamado de autovetor à direita da matriz A. Se os autovalores de A forem agrupados em uma única matriz, obtém-se:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

A matriz contendo os autovetores da matriz A é dada por:

$$X = [x_1 \ \ldots \ x_n].$$

Na expressão acima, x_1 é o autovetor associado a λ_1, e assim sucessivamente, até o vetor x_n, que está associado a λ_n. Se a matriz A for multiplicada pela matriz de autovetores X, tem-se:

$$A\,X = \lambda_1 x_1 \ldots \lambda_n x_n.$$

Onde cada λx representa uma coluna da matriz AX
Que é equivalente a:

$$A\,X = X\,\Lambda.$$

Transpondo a matriz A, a seguinte relação pode também ser obtida:

$$A^T\,Y = Y\,\Lambda$$

A^T é a transposta de A, *i.e.*, $a_{ij} = a_{ji}$. Y é a matriz de autovetores à esquerda de A, ou seja, são autovetores da matriz transposta de A.

Portanto, tem-se:

$$A X = X \Lambda \Rightarrow A = X \Lambda X^{-1};$$

$$A^T Y = Y \Lambda \Rightarrow A^T = Y \Lambda Y^{-1}.$$

Da segunda expressão acima, vem:

$$A = (Y^{-1})^T \Lambda^T Y^T = X \Lambda X^{-1}.$$

Como $\Lambda^T = \Lambda$ (matriz diagonal) vem que $Y^T = X^{-1}$ ou $X = (Y^{-1})^T$ ou $X^T = Y^{-1}$. Logo, A pode ser decomposta por:

$$A = X \Lambda Y^T.$$

Observa-se que a decomposição torna-se mais fácil se a matriz A for simétrica, uma vez que $Y = X$. A determinação dos autovalores fornece uma matriz diagonal que é equivalente à matriz original. Notar, no entanto, que isso não significa que ambas as matrizes sejam numericamente iguais. Assuma, por exemplo, que tenhamos:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem autovalores dados por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Λ evidentemente é numericamente diferente de A. Este tipo de solução será abordado novamente na seção de equações diferenciais.

2.1.6 OBTENÇÃO DE AUTOVALORES POR MEIO DE PACOTES COMPUTACIONAIS

No *software* Matlab, o cálculo dos autovalores de uma matriz é dado por [*vetor valor*] = *eig*(*A*), onde *vetor* é a matriz de autovetores e *valor* é a matriz de autovalores de *A*. Em Scilab um comando equivalente é dado por [*vetor valor*]=*spec*(*A*), onde as variáveis *vetor, valor* e *A* têm os mesmos significados do que os definidos em Matlab. Notar que *vetor* e *valor* são nomes arbitrados para as matrizes, de forma que poderiam ser quaisquer. Para transpor a matriz *A*, basta digitar $B = A'$. Neste caso, *B* foi criada de forma que a matriz original *A* fosse preservada.

2.1.7 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Assuma a função $A\ (a_1, a_2)$ que transforma cada par de vetores (x_1, x_2) em uma área de um paralelogramo de lados a_1 *e* a_2 se

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A\ (a_1, a_2) = 1$ se

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se um dos vetores for multiplicado por um real α, *A* também é multiplicado por α. Portanto, em termos da função *A* tem-se:

$$A(\alpha a_1, a_2) = A = (a_1, \alpha a_2) = \alpha A(a_1, a_2).$$

Um determinante *Det* é uma função que relaciona cada conjunto de vetores $\{ a_1, \ldots, a_n \}$ a um escalar, tal que:

1. $Det\ (a_1, \ldots, \alpha a_i, \ldots, a_n) = \alpha\ Det\ (a_1, \ldots, a_n)$;
2. $D\ (e_1, \ldots, e_n) = 1$ se cada e_i é o iésimo vetor unitário.

Algumas propriedades:

a) $Det\ (a_1, \ldots, a_n)$ é multiplicado por -1 se dois vetores a_i e a_j são trocados.

b) $Det\ (a_1,..., a_n) = 0$ se dois vetores são iguais ou linearmente dependentes.

c) *Det* não muda se a_i for trocado por $a_i + \Sigma \lambda_j a_j$

PROPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO

Assuma uma matriz B e uma matriz C de dimensões $n \times n$. O produto é uma matriz BC de dimensão $n \times n$. Então:

$$Det\ (BC) = Det\ (B)\ Det\ (C).$$

Notar que o posto (ou *rank*) de uma matriz B (de dimensão $n \times n$) é n se e somente se, $Det\ (B) \neq 0$. Neste ponto é importante lembrar que o posto de uma matriz é dado pelo número de linhas linearmente independente.

REGRA DE SCHUR

A propriedade da multiplicação acima nos permite decompor a matriz U conforme indicado abaixo.

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$D' = D - C A^{-1} B$$

As submatrizes A, B, C e D devem ter dimensões coerentes para que a decomposição acima seja válida. O determinante (*Det*) de U é dado por:

$$Det\ (U) = Det\ (A)\ Det\ (D').$$

2.1.8 CONFIRMAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO POR AUTOVALORES

Assumindo uma matriz simétrica, onde os autovetores à direita e esquerda sejam iguais, tem-se:

$$A = X\ \Lambda X^{-1}$$

$$Det\ (A) = Det\ (X)\ Det\ (\Lambda)\ Det\ (X^{-1})$$

$$Det\ (A) = Det\ (X)\ Det\ (X^{-1})\ Det\ (\Lambda)$$

$$Det\,(A) = Det\,(X X^{-1})\,Det\,(\Lambda)$$

$$Det\,(A) = Det\,(I)\,Det\,(\Lambda)$$

Em Matlab e em Scilab, a função determinante é dada pelo comando *det*(*A*), onde *A* é a matriz analisada.

2.1.9 MATRIZ SINGULAR

As definições discutidas anteriormente permitem apresentar um tipo de matriz bastante importante em análise de sistemas dinâmicos. Tal matriz é chamada de matriz singular, cuja principal característica é o fato de ter seu determinante igual a zero. Como o determinante de uma matriz é dado pelo produto de seus autovalores, conclui-se que pelo menos um autovalor dessa matriz também deve ser nulo.

INVERSA E FATORAÇÃO DE MATRIZES

A solução do sistema $Ax = b$ requer o cálculo da inversa da matriz A, o que é computacionalmente custoso. Uma forma de evitar este esforço de calcular explicitamente a inversa de uma matriz consiste em fatorar essa matriz. A seguir, uma técnica de fatoração é mostrada, chamada fatoração *LU*.

FATORAÇÃO LU

O sistema de equações $Ax = b$ é resolvido através da decomposição da matriz A em duas matrizes, uma triangular superior (U), e uma triangular inferior (L), de forma que se pode escrever:

$$LUx = b.$$

Denominando $U\,x = y$, pode-se resolver primeiro $L\,y = b$, para finalmente obter x por:

$$U\,x = y.$$

Note que o fato de as matrizes acima serem triangulares resolve inteiramente o problema, já que não se necessita inverter qualquer matriz. Um caso bastante particular será mostrado adiante, quando uma matriz A singular será mostrada.

2.1.10 REVISANDO MATRIZES SINGULARES

Foi dito anteriormente que matrizes singulares apresentam pelo menos um autovalor igual a zero. Na verdade, essas matrizes apresentam linhas linearmente dependentes. Duas linhas são linearmente dependentes quando, a partir de uma delas, consegue-se chegar à segunda através de manipulações algébricas.

Assuma que x_1 represente um elemento qualquer (por exemplo, uma dúzia de bananas). Assuma também que a equação $2x_1 = 4$ represente que duas dúzias de bananas custem 4 reais. O quão caro ou barato é este preço fica por conta da pesquisa de mercado do leitor. Dessa expressão concluímos que, $x_1 = 2$, ou seja, uma dúzia custa 2 reais.

A solução da equação acima é bem simples, já que se dispunha de uma equação e se necessitava calcular somente uma incógnita. Assuma, no entanto, que além de x_1, uma variável x_2, representando unidades de maçãs seja também incorporada. Neste caso, assumimos que não temos acesso à equação anteriormente associada a x_1, de forma que seu valor é desconhecido. Hipoteticamente, tem-se a equação

$$2x_1+3x_2 = 7\,.$$

Infelizmente, a solução do sistema não é possível, dado que temos somente uma equação para duas incógnitas. Note que podemos chamar a equação de informação. Assim, precisamos de uma outra informação que nos possibilite determinar x_1 e x_2. Como essa informação não está disponível, criamos, a partir da única informação existente, uma segunda informação. Por exemplo, multiplica-se a informação disponível por 2, gerando:

$$2x_1 + 3x_2 = 7$$

$$4x_1 + 6x_2 = 14$$

Assim,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}7\\ 14\end{bmatrix}.$$

Ao fatorarmos a matriz A por decomposição LU, obtém-se:

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema não tem solução. A ausência de solução é conseqüência da dependência linear entre as duas informações. Se a informação associada a x_1 for conhecida, tem-se:

$$2x_1 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 = 7$$

É obtida a solução única $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Portanto, a partir desse exemplo, vemos que é possível considerar cada linha de uma matriz como uma informação. De forma a resolver o sistema linear de equações, todas as informações devem ser não redundantes, o que garante a independência linear entre as informações e a existência de uma solução única.

Livros inteiros são devotados ao estudo de Álgebra Linear. Entretanto, este texto não abordará outros tópicos relacionados a este campo, já que os itens abordados neste capítulo são suficientes para o entendimento da teoria de sistemas dinâmicos apresentada nos capítulos seguintes. Assim, a próxima seção abordará alguns conceitos fundamentais de equações diferenciais, indispensáveis para o estudo de sistemas dinâmicos.

Nos *softwares* Matlab e Scilab, a fatoração LU de uma matriz é dada por $[L, U] = lu(A)$, onde L e U são os nomes das matrizes triangulares inferiores e superiores da decomposição associada à matriz A. Para fatorar uma matriz diretamente, usa-se o comando $A\backslash b$, que resolve o sistema $Ax = b$.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.2.1 INTRODUÇÃO

A exemplo da revisão de álgebra linear, esta seção aborda uma pequena revisão de equações diferenciais. Quando o foco do estudo for sistemas dinâmicos, certamente se requer o uso de equações diferenciais. Os fundamentos do cálculo diferencial e integral foram propostos em 1666 por Isaac Newton. Tais fundamentos permitem realizar estudos de complexidades consideráveis, e seu entendimento requer, por si só, a leitura de livros inteiros devotados ao assunto. Nessa seção, cuidaremos apenas dos aspectos que são fundamentais

para o entendimento da teoria de sistemas dinâmicos contida neste livro. Assim, o leitor é encorajado a buscar na literatura um material mais adequado e completo para o entendimento do assunto. Assume-se aqui, portanto, que o leitor já tenha tido acesso à teoria de equações diferenciais, de forma que essa seção fornece apenas uma revisão sobre parte do assunto.

2.2.2 DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

Uma equação diferencial é denominada ordinária quando a função incógnita depende de apenas uma variável independente. Se esta função depender de um número maior de variáveis independentes, é chamada de equação diferencial parcial.

SOLUÇÃO

Uma solução de uma equação diferencial na incógnita y e na variável independente x no intervalo α é uma função $y(x)$ que verifica a equação diferencial identicamente em todo x em α. Assim, tem-se que $y(x) = C_2\, sen(2x) + C_2\, cos(2x)$ é uma solução de $y'' + 4y = 0$. Isso pode ser visto através da substituição de $y(x)$ na equação original. Assim:

$$y(x) = 2C_1 cos(2_x) - 2C_2 sen(2x)$$

$$y(x) = -4C_1 sen(2_x) - 4C_2 cos(2x)$$

$$y(x) + 4y = (-4C_1 + 4C_1)\, sen(2x) + (4C_2 - 4C_2) cos(2x) = 0$$

Nesse ponto, pode-se definir solução geral como sendo o conjunto de todas as soluções. A definição de C_1 e C_2 a partir de algumas condições estabelecidas fornece uma solução particular.

2.2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita como:

$$a_0(x)\, y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x).$$

A equação acima será homogênea se $f(x) = 0$. Esse tipo de equação não será abordado aqui, a menos de um detalhe importante, que permitirá reduzir a dimensão da equação analisada. A partir da equação acima, uma equação de primeira ordem será da forma:

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = f(x).$$

A solução geral da equação é dada por:

$$y = exp(-\frac{a_1}{a_0}).$$

Logo, a solução de uma equação diferencial de primeira ordem é dada por uma exponencial. Este aspecto, bastante importante, será lembrado adiante em outras aplicações. Assuma, no entanto, que ao invés de um sistema de primeira ordem, tenhamos o sistema de segunda ordem mostrado abaixo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x = 0.$$

De forma a transformar o sistema acima em um sistema de primeira ordem, faz-se:

$$x = x_1, \frac{\partial x}{\partial t} = x_2,$$

obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= x_2 \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -x_1 \end{aligned}.$$

Logo, um sistema de ordem 2 foi reescrito através de duas equações de ordem 1. Este tipo de parametrização é bastante importante, e será utilizado aqui. Em particular, abordaremos esse assunto quando estudarmos variáveis modais.

2.2.4 ALGUNS EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

CRESCIMENTO POPULACIONAL

O primeiro caso ilustrativo, e bem simples, de aplicação refere-se ao problema de crescimento e decaimento populacional. Uma formulação de primeira ordem (não adequada, por razões que não serão expostas aqui) pode ser dada por:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = kN.$$

Esta equação indica que a taxa de variação no tempo é proporcional à população (N). Logo:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - kN = 0.$$

MODELO ECOLÓGICO DE LOTKA-VOLTERRA

Este problema, ainda de primeira ordem, modela a coexistência de duas espécies. A espécie A é denominada presa e uma espécie B considerada predadora. A espécie A alimenta-se de plantas, enquanto B se alimenta de A. Arbitrando:

- $x(t)$ = população de A;
- $y(t)$ = população de B.

E assumindo que A tem vida longa e alta taxa de reprodução, após um intervalo tem-se:

$$\Delta x = kx\Delta t.$$

O parâmetro k é maior que zero. A diminuição da população de A depende do encontro com B. Assim:

$$\Delta x = kx\Delta t - axy\Delta t.$$

Onde a constante a é maior que zero. No limite, $\Delta t \to 0$, e tem-se $x' = kx - axy$. Sem A, a população de B tende a diminuir:

$$\Delta y = -Ly\Delta t.$$

Sendo $L > 0$. Se, no entanto, houver encontro com A vem:

$$\Delta y = bxy\Delta t - Ly\Delta t.$$

Sendo $b > 0$. No limite tem-se:

$$y' = bxy - Ly.$$

Os pontos fixos das equações acima são dados por:

$$\begin{aligned} x' &= kx - axy = 0 \\ y' &= bxy - Ly = 0 \end{aligned}.$$

Os pontos fixos retratam uma situação em que x nem y variam. Assim, duas soluções se apresentam como:

1. $(0,0)$;
2. $(L/b, k/a)$.

2.2.5 REVISANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A partir da seção anterior, foi visto que é possível reescrever uma equação diferencial de ordem n através de n equações diferenciais de primeira ordem. Seja a equação diferencial $x' = Ax$, onde x' e x têm dimensão $n \times 1$ e A tem dimensão $n \times n$. Note que este é um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem. No entanto, como vimos na revisão de autovalores, é possível desacoplar essas equações. A matriz de autovalores, embora equivalente, é numericamente diferente da matriz A. Assumindo P como sendo a matriz de autovetores associados aos autovalores de A, pode-se arbitrar:

$$y = P^{-1}x.$$

Assim, a partir de $x' = Ax$, pode-se escrever:

$$P^{-1}y = P^{-1}AP.$$

Lembrando que $AP = P\Lambda$, tem-se $P^{-1}y = P^{-1}APy$, mas $P^{-1}AP = \Lambda$, o que fornece, finalmente:

$$y = \Lambda y.$$

Notar que o conjunto de equações acima, além de ser de primeira ordem, está na forma desacoplada, de forma que a solução é trivial. Para abraçar a teoria entre autovalores e as soluções de equações diferenciais, resolveremos o exemplo abaixo, retirado do livro de Hirsch e Smale citado ao final do capítulo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1; & y_1 &= ae^t; \\ \dot{y}_2 &= 2y_2; & y_2 &= be^{2t}; \\ \dot{y}_3 &= -y_3; & y_3 &= ce^{-t}. \end{aligned}$$

Das relações acima, vem:

$$X = Py = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^t \\ be^{2t} \\ ce^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ae^t \\ -2ae^t + be^{2t} \\ ae^1 + ce^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_1(0) = 2a;$$

$$x_2(0) = -2a + b;$$

$$x_3(0) = a + c.$$

Equacionando, vem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Que depende das condições iniciais. Portanto, a solução acima mostra que a partir de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, a decomposição por autovalores e autovetores pode fornecer a solução das equações. Note que, não por acaso, cada solução está associada a uma exponencial.

A seguir, uma pequena revisão de transformada de Laplace é apresentada.

2.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace permite, basicamente, que equações diferenciais com coeficientes constantes sejam convertidas em equações algébricas. Isso

facilita enormemente as manipulações e os cálculos. Por definição, a transformada de Laplace é dada por:

$$F(S) = L[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-St}dt.$$

O termo St é adimensional. Para que a Transformada de Laplace de uma função exista, $f(t)$ deve ser de ordem exponencial. Uma função $f(t)$ será de ordem exponencial γ se existirem constantes reais $M > 0$ e γ tais que $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$. Na prática, esta função não cresce mais que $Me^{\gamma t}$, ou seja, a expressão abaixo converge para um valor finito:

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-St}dt.$$

A partir dessa expressão, algumas transformadas importantes são mostradas.

CONSTANTE

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} Ke^{-St}dt = -K\frac{e^{-St}}{S}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{K}{S}$$

É importante enfatizar que, na expressão anterior, t é quem varia de 0 a infinito, e não S.

EXPONENCIAL CRESCENTE

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} e^{\alpha t}e^{St}dt = \frac{e^{-(S-\alpha)t}}{S-\alpha}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{S-\alpha}$$

Seno

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} sen(wt)e^{-St}dt$$

Sabe-se que

$$sen(wt) = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j},$$

Logo:

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} sen(wt)e^{-St}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{(e^{jwt} - e^{-jwt})}{2j} e^{-St}dt;$$

Pode-se dividir a transformada acima em dois termos;

$$TL1 = \int_{0}^{\infty} e^{-(S-jw)t}dt, TL2 = \int_{0}^{\infty} e^{-(S+jw)t}dt,$$

de forma que:

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} sen(wt)e^{-St}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{(e^{jwt} - e^{-jwt})}{2j} e^{-St}dt = \frac{1}{2j}[TL1 + TL2],$$

A transformada de $TL1$ é dada por:

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(S-jw)t}dt = -\frac{e^{-(S-jw)t}}{S-jw}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{S-jw},$$

enquanto $TL2$ é:

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(S+jw)t}dt = -\frac{e^{-(S+jw)t}}{S+jw}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{S+jw}.$$

Logo:

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} sen(wt)e^{-St}dt = \frac{1}{2j}[\frac{1}{S-jw} + \frac{1}{S+jw}] = \frac{w}{S^2 + w^2}.$$

Sugere-se ao leitor resolver a transformada de *cos*(*wt*). O raciocínio é bastante parecido com o desenvolvimento de *sen*(*wt*). No entanto, parte-se de

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2},$$

O resultado obtido é

$$F(S) = \int_{0^-}^{\infty} sen(wt)e^{-St}dt = \frac{S}{S^2 + w^2}.$$

PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

a) Linearidade

Sejam a e b constantes

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(S) + bF_2(S), \text{ uma vez que:}$$

$$L[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_0^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-St}dt =$$

$$= a\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-St}dt + b\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-St}dt = aF_1(S) + bF_2(S).$$

b) Translação na freqüência

$$L[e^{-at}f(t)] = F(S + a), \text{ pois:}$$

$$L[e^{-at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-St}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(S+a)t}dt = F(S + a).$$

c) Transformadas de derivadas

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-St}. \text{ Sabe-se que:}$$

$$\int udv = uv - \int vdu. \text{ Logo:}$$

$$u = e^{-St} \Rightarrow du = -Se^{-St}dt$$

$$dv = f(t)dt \Rightarrow v = f(t).$$

Assim:

$$\int f'(t)e^{-St}dt = e^{-St}\, f(t)|_0^{\infty} + S\int_0^{\infty} f(t)e^{-St}dt.$$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-St} f(t) = 0$, vem:

$$\int f'(t)e^{-St}dt = SF(S) - f(0).$$

Para derivada de segunda ordem, troca-se $f(t)$ por $f(t)$.

$$\int f''(t)e^{-St}dt = S^2F(S) - Sf(0) - f'(0).$$

Para uma expressão de ordem n qualquer:

$$\int \frac{\partial^n f}{\partial t^n} e^{-St}dt = S^nF(S) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

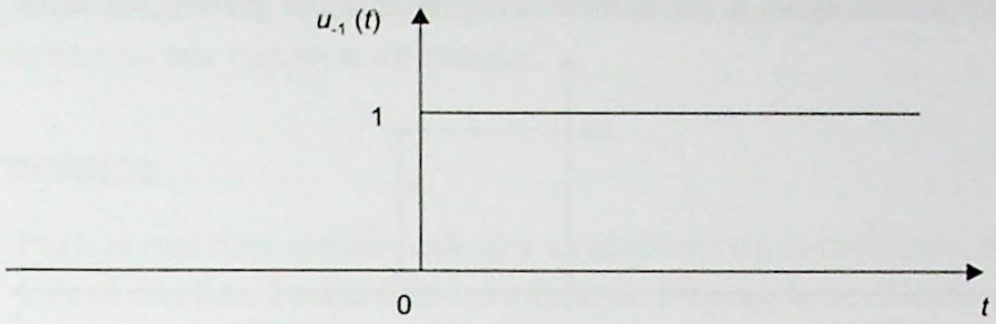
Serão apresentados mais alguns elementos bastante importantes em análises em geral que são os diferentes tipos de entradas. Assim, serão abordados os três tipos mais comuns, conforme mostrado a seguir.

DEGRAU

O degrau unitário é definido pelo símbolo $u_{-1}(t)$, e sua representação no domínio do tempo é dada por

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases},$$

com representação gráfica dada por:



A transformada é dada por uma constante para o intervalo anterior ao degrau (0), e outra depois (1), de forma que:

$$F(S) = \int_0^\infty 1e^{-St}dt = \frac{1}{S}.$$

RAMPA OU INTEGRAL DO DEGRAU

Assumindo:

$$u_{-2}(t) = \int_0^\infty u_{-1}(t)dt = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \int_0^\infty 1dt, t > 0 \end{cases}.$$

Logo,

$$u_{-2}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t > 0 \end{cases},$$

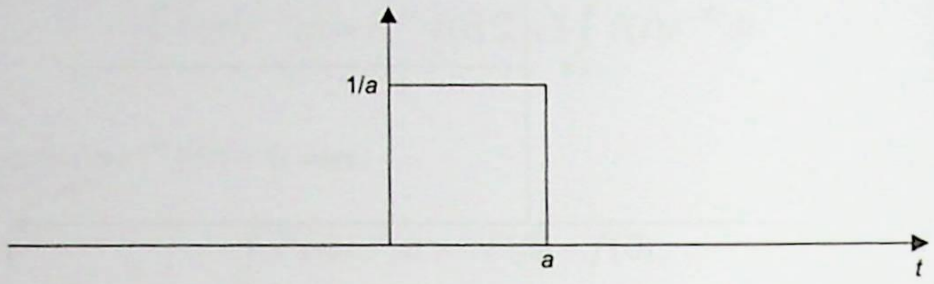
definindo a rampa unitária, com transformada:

$$F(S) = \int_0^\infty te^{-St}dt = \frac{1}{S^2}.$$

Uma entrada tipo parábola ou integral da rampa é facilmente definida, obtendo-se como resposta $1/s^3$.

Um caso interessante aparece quando um pulso é aplicado durante um

período igual a a segundos. Assumindo que este degrau, ao invés de unitário, tenha amplitude igual a $1/a$, tem-se a representação gráfica seguinte.



Para o caso citado, tem-se

$$F(S) = \int_0^a \frac{1}{a} e^{-St} dt + \int_a^\infty 0 e^{-St} dt,$$

que é igual a

$$F(S) = \frac{-(e^{-Sa} - 1)}{Sa}.$$

Se $a \to 0$: $F(S) = \frac{0}{0}$, uma indeterminação, mas por L'hopital vem que $F(S) = 1$. Neste caso, tem-se a função impulso.

No Anexo 1 encontra-se algumas propriedades da transformada de Laplace e no Anexo 2 algumas transformadas básicas.

2.4 VARIÁVEIS E EQUAÇÕES DE ESTADO

Este tema será tratado com detalhes no capítulo 4. No entanto, como o capítulo 3 é devotado a modelagem de sistemas, torna-se importante apresentar brevemente esta definição.

Um sistema dinâmico pode ser modelado pela representação $\dot{x} = Ax + Bu$, onde x representa as variáveis de estado, e u são as fontes de excitação. A e B são matrizes que relacionam as derivadas das variáveis de estado consigo mesmas (x) e com as excitações.

Se um subconjunto y de x for o interesse, tem-se $y = Cx+Du$. Dado que há interesse em explicitar algumas das variáveis de estado, uma equação algébrica é introduzida. O conjunto final, portanto, é dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx+Du.$$

A forma de lidar com estes tipos de equacionamento será detalhada no capítulo 4, onde também se trabalha com a definição das matrizes A, B, C e D da representação em variáveis de estado.

2.5 EXERCÍCIOS

1. Para as matrizes abaixo, calcular as matrizes de autovalores, autovetores à direita e à esquerda das matrizes. Depois deste cálculo, confirmar a decomposição por autovalores e autovetores.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.9 & 8 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 15 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 4 & 0.4 & 1 \\ 0.4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Provar a decomposição da Regra de Schur apresentada na seção 2.1.7.
3. Para as matrizes do Exercício 1, calcular o determinante de A. Multiplicar A por 2, 5 e 10. Recalcular o determinante analiticamente e com uma ferramenta computacional.
4. Resolva os sistemas de equações $Ax = b$, $Bx = b$ e $Cx = b$, onde A, B e C são dadas no primeiro exercício. O vetor b é dado por

$$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Para cada matriz A abaixo, resolver $x' = A\,x$.

$$\text{a)}\,A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)}\,A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\,A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2.6 REFERÊNCIAS

Diversos livros estão disponíveis na literatura a respeito dos assuntos abordados neste capítulo. A referência LIMA (2001) aborda estes temas de uma maneira didática, dispensando o leitor de conhecimentos prévios. O mesmo tipo de abordagem está presente também em CURTIS (1984) e LIPSCHUTZ (1968). Uma abordagem mais profunda é encontrada em HORN e JOHNSON (1985) e GOLUB & VAN LOAN (1989). Tópico em equações diferenciais são encontrados em MORRIS e STEPHEN (1974).

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

CURTIS, C. W. *Linear Algebra*. An Introduction Approach. Springer-Verlag, 1984.

LIPSCHUTZ, S. *Theory and Problems of Linear Algebra*. Schaum´s Outlines Series, McGraw-Hill, INC. 1968.

HORN, R. & JOHNSON, C. R. *Matrix Analisis*. Cambridge University Press, 1985.

GOLUB G. H. & VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.

MORRIS, W. H. & STEPHEN, S. *Differential Equations*, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic press, 1974.

Capítulo 3

Introdução à Modelagem de Sistemas Dinâmicos

3.1 INTRODUÇÃO

Nas análises e estudos de sistemas complexos são necessárias representações adequadas que permitam modelar características relevantes dos mesmos. A modelagem matemática de sistemas dinâmicos é realizada por meio de equações que representam suas dinâmicas com um determinado grau de precisão estabelecido. A complexidade que os sistemas reais podem apresentar na prática, ou o desconhecimento de todos os detalhes constituintes dos mesmos, leva à necessidade de se trabalhar com aproximações. Dependendo da precisão requerida existem vários modelos possíveis de serem utilizados. Geralmente, busca-se um compromisso entre a simplicidade do modelo matemático adotado e a precisão resultante.

Muitos sistemas práticos são modelados através de conhecimentos relacionados a áreas da física, química, biologia, etc. Esta abordagem é conhecida como modelagem fenomenológica ou conceitual, modelagem pela física ou natureza do sistema, também chamada de modelagem "caixa branca". Nesse tipo de abordagem é necessário conhecer determinados detalhes ou propriedades básicas do sistema a ser modelado. Estas propriedades são representadas por relações entre os parâmetros e as variáveis pertinentes aos fenômenos envolvidos no sistema ou processo estudado. Essas relações são expressas por equações diferenciais, funções de transferência, variáveis de estado, etc. Os coeficientes ou parâmetros relativos às equações ou funções dos modelos podem ser obtidos por meio de medições ou ensaios experimentais.

Obtido um modelo matemático adequado de um sistema, pode-se estudar o comportamento do mesmo sem a necessidade de acessar o sistema real, utilizando-se apenas sua representação matemática que pode ser resolvida por meio de métodos analíticos ou numéricos.

A finalidade deste capítulo é mostrar a modelagem de alguns sistemas dinâmicos básico, tais como sistemas elétricos, mecânicos, térmicos, químicos, etc. Por questões didáticas, os exemplos ilustrativos serão agrupados, quando possível, em áreas afins.

3.2 MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS BÁSICOS

As variáveis ou grandezas físicas freqüentemente utilizadas para descrever o comportamento de sistemas elétricos são tensões e correntes em função do tempo (t), que geralmente é a variável independente. Os elementos básicos constituintes desses sistemas são fontes de tensão ou corrente, resistências, indutâncias e capacitâncias. As equações que expressam os fenômenos típicos envolvidos são representadas por relações bem conhecidas em leis da eletricidade e são descritas resumidamente a seguir.

- Lei de Ohm: Relaciona a tensão v aplicada a uma resistência R com uma corrente elétrica resultante, ou seja,

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}, \text{ ou } \frac{v(s)}{i(s)} = R,$$

onde s é o operador de Laplace.

- Lei de Lenz: Relaciona a tensão v em uma indutância L resultante da passagem de uma dada corrente i no tempo t, cuja relação é

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \text{ ou } \frac{v(s)}{i(s)} = Ls.$$

- Relação entre corrente i e tensão v no tempo t em uma capacitância C, ou seja,

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}, \text{ ou } \frac{v(s)}{i(s)} = \frac{1}{Cs}.$$

Geralmente, as relações entre tensões e correntes em sistemas elétricos representam resistências, reatâncias ou impedâncias associadas aos mesmos.

- Lei de Kirchhoff: A somatória das tensões em um laço fechado de um circuito elétrico é sempre nula. Ou a somatória das correntes em um nó de um circuito é sempre zero.

Com as equações ou leis citadas é possível equacionar sistemas elétricos em geral, obtendo-se expressões matemáticas que representem suas dinâmicas. Os modelos assim obtidos são usados para estudar o comportamento de processos elétricos sem a necessidade de se acessar sistemas físicos. Alguns modelos de sistemas reais são muito utilizados na prática e serão mostrados neste item na forma de exemplos.

EXEMPLO 3.1

Circuito RL. Este tipo de sistema é muito freqüente em vários modelos de enrolamentos de máquinas elétricas, de bobinas de excitação de máquinas síncronas, de máquinas de corrente contínua, etc. Uma fonte de tensão v_a alimenta um circuito associado que fornece uma corrente conforme ilustrado na figura 3.1.

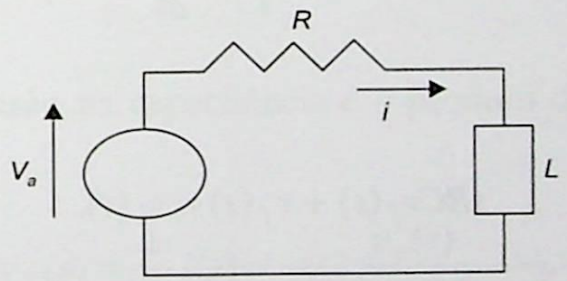


Figura 3.1 Circuito *RL*.

Utilizando as leis de Kirchhoff (somatória das tensões), de Ohm e de Lenz, vem:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} - v_a(t) = 0, \text{ ou } Ri(s) + sLi(s) - v_a(s) = 0.$$

A relação ou função de transferência $i(s)/v(s)$ representa a condutância do circuito.

$$\frac{i(s)}{v_a(s)} = \frac{1}{Ls + R} \tag{3.1}$$

EXEMPLO 3.2

Circuito RC. Este circuito é muito utilizado em filtros, em instrumentação elétrica e eletrônica, e também como parte integrante de compensadores em malhas de controle. O esquema da figura 3.2 ilustra um circuito típico, onde a tensão v_e representa um sinal na qual deseja filtrar-se uma ou mais componente constituinte, sendo v_f o sinal resultante da filtragem. A corrente que passa através do capacitor é a mesma que percorre o resistor do circuito.

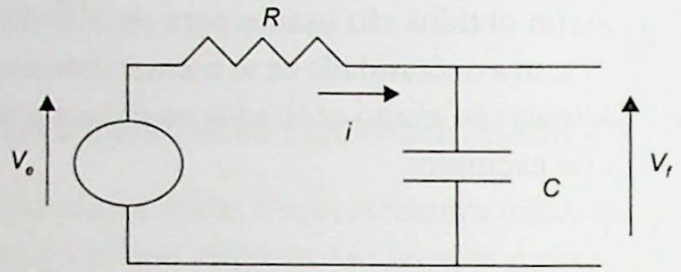


Figura 3.2 Circuito *RC*.

Equacionando, vem:

$$Ri(t) + v_f(t) - v_e(t) = 0 = RC\frac{dv_f(t)}{dt} + v_f(t) - v_e(t),$$

ou

$$sRCv_f(s) + v_f(s) = v_e(s).$$

A relação $v_f(s)/v_e(s)$ representa a função resultante do filtro.

$$\frac{v_f(s)}{v_e(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \tag{3.2}$$

EXEMPLO 3.3

Circuito RLC. Este circuito é utilizado como elemento integrante de alguns conversores estáticos de energia, como estrutura de alguns tipos de filtros, ou como modelo de cabos ou linhas de transmissão (tanto em sistemas de comunicação como em sistemas de potência). O diagrama da figura 3.3 ilustra a estrutura básica. A variável v_e representa a entrada do sistema, sendo v_f sua saída. A corrente resultante do circuito percorre todos os elementos do mesmo.

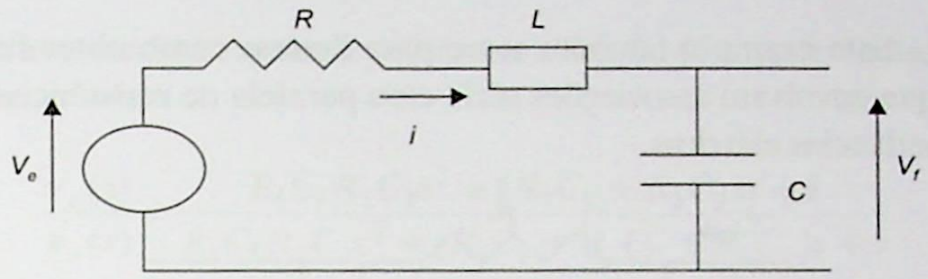


Figura 3.3 Circuito *RLC*.

O sistema pode ser equacionado no domínio do tempo (através de equações diferenciais) ou no domínio da freqüência (usando a transformada de Laplace). A vantagem de usar o operador de Laplace é que as variáveis e parâmetros podem ser manipulados algebricamente de maneira simples, sendo que as indutâncias e as capacitâncias são representadas através das suas reatâncias Ls e $1/Cs$, respectivamente. A corrente elétrica resultante é expressa pela relação entre a tensão de entrada e a impedância equivalente associada à resistência, reatância indutiva e reatância capacitiva do circuito, ou seja:

$$i(s) = \frac{v_e(s)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Csv_e(s)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

A queda de tensão na capacitância é o produto da corrente pela sua reatância, logo:

$$v_f(s) = \frac{1}{Cs} i(s) = \frac{v_e(s)}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

A relação $v_f(s)/v_e(s)$ é a função de transferência resultante do circuito.

$$\frac{v_f(s)}{v_e(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{3.3}$$

EXEMPLO 3.4

Circuito de Avanço/Atraso de Fase. Este circuito é utilizado em implementações de compensadores analógicos em sistemas de controle. O esquema da figura 3.4 ilustra esse tipo de circuito, onde a tensão v_e representa o sinal de erro de uma malha de controle e v_c é o sinal de compensação. O nome avanço/atraso é devido a modificações que esse tipo de circuito acarreta na fase do sinal v_c em relação

ao sinal v_e. Este exemplo também serve para ilustrar como obter funções de circuitos que envolvam associações série e/ou paralela de resistências, reatâncias e impedâncias elétricas.

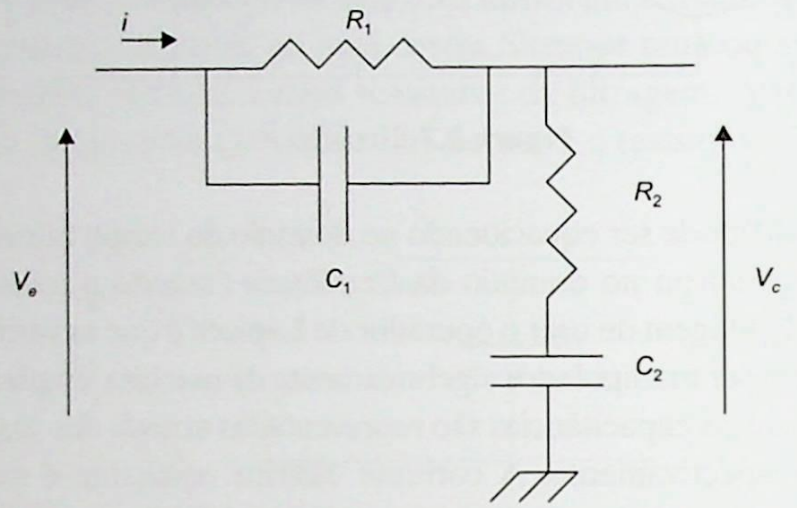
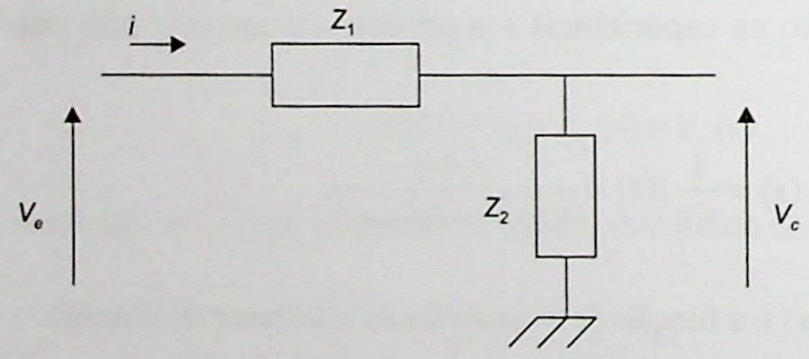


Figura 3.4 Compensador de Avanço/Atraso de Fase.

Neste circuito, a resistência R_1 e a reatância de C_1 podem ser associadas em paralelo resultando em uma impedância Z_1, e a resistência R_2 em série com a reatância de C_2 define uma impedância Z_2. Assim, o circuito da figura 3.4 pode ser representado pelo circuito da figura 3.5.



$$Z_1 = \frac{\frac{R_1}{sC_1}}{R_1 + sC_1};$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2};$$

$$i(s) = \frac{V_e(S)}{Z_1 + Z_2}$$

Figura 3.5 Circuito equivalente.

A tensão v_c é o produto da impedância Z_2 pela corrente i(s), logo:

$$v_c(s) = \frac{v_e(s)Z_2}{Z_1 + Z_2} = v_e(s)\frac{(R_2 + \frac{1}{sC_2})}{\frac{R_1}{(\frac{sC_1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}})} + (R_2 + \frac{1}{sC_2})}$$

Desenvolvendo a expressão, obtém-se a função de transferência $v_c(s)/v_e(s)$ do sistema.

$$\frac{v_c(s)}{v_e(s)} = \frac{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)s + 1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1} \tag{3.4}$$

De maneira similar, outros modelos de sistemas elétricos podem ser obtidos, aplicando-se leis básicas da eletricidade. Na seção 3.5 serão vistos outros exemplos que envolvam sistemas elétricos. Os exercícios propostos no final deste capítulo servem para treinar os conceitos de obtenção de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos.

3.3 MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS, HIDRÁULICOS E TÉRMICOS BÁSICOS

Alguns sistemas físicos podem ser classificados em sistemas mecânicos translacionais ou rotacionais, hidráulicos, térmicos e associações decorrentes.

3.3.1 SISTEMAS MECÂNICOS TRANSLACIONAIS

As variáveis ou grandezas físicas freqüentemente utilizadas para descrever o comportamento de sistemas mecânicos translacionais são: deslocamentos lineares; velocidades; acelerações; forças. Os elementos básicos mais comuns desses sistemas são massas, molas, amortecedores e atritos viscosos. As relações que expressam os fenômenos básicos envolvidos em tais sistemas são representadas através de algumas equações bem conhecidas em mecânica e estão descritas a seguir.

- Lei de ação e reação de forças (terceira lei de Newton): O deslocamento de um corpo devido uma força (ação) produz uma reação de mesma intensidade em sentido contrário.
- Segunda lei de Newton: Relaciona a aceleração a, velocidade v ou deslocamento x de uma massa M sujeita a uma força F no tempo t, sendo s o operador de Laplace, ou seja,

$$F(t) = Ma(t) = M\frac{dv(t)}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \text{ ou ainda } F(s) = sMv(s) = Ms^2x(s).$$

- Lei de D'Alembert: A somatória dos momentos ou forças em um corpo em equilíbrio é nula.

- Força de mola: Relaciona a força F associada a uma mola com um determinado coeficiente elástico K sujeita a um deslocamento x, ou seja,

$$F(t) = Kx(t),\ F(s) = (s).$$

- Força de amortecedor ou de atrito viscoso: Relaciona a força F associada a um corpo movimentando-se em um meio viscoso representado por um determinado coeficiente de atrito B devido a um deslocamento x no tempo t, ou a sua velocidade v resultante, sendo

$$F(t) = Bv(t) = B\frac{dx(t)}{dt},\ \text{ou}\ F(s) = Bv(s) = sBx(s).$$

Com estas equações (ou leis), é possível modelar sistemas transacionais em geral, obtendo expressões matemáticas que representem suas dinâmicas. Os modelos assim obtidos são usados para estudar o comportamento desses sistemas sem a necessidade de se acessar processos reais. Alguns exemplos de modelos de sistemas transacionais típicos serão mostrados a seguir.

EXEMPLO 3.5

Sistema Massa-Atrito. Esta representação modela o deslocamento de um corpo em um determinado meio (ou superfície). Na figura 3.6 a grandeza M representa a massa do corpo, B é o coeficiente de atrito entre o mesmo e a superfície ou o meio na qual ele se desloca (por exemplo, o atrito ocasionado por um fluido como a água sob um barco, ou o ar fluindo sobre um veículo em movimento). A variável f é a força de impulsão do sistema e v é a velocidade resultante do mesmo.

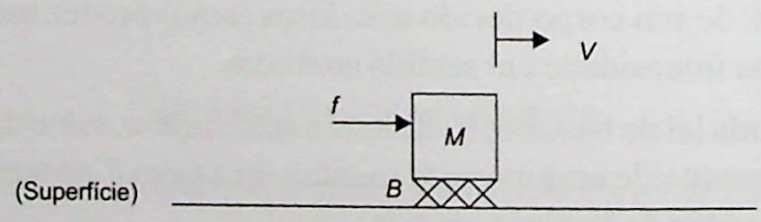


Figura 3.6 Sistema Massa-Atrito.

Admitindo que no sentido vertical a força peso exercida pela gravidade é anulada pela força normal resultante da reação com a superfície, então no sentido horizontal as forças envolvidas são: força de impulsão f; força de atrito

F_B; força de reação da massa do corpo F_M. O diagrama da figura 3.7 caracteriza as forças do sistema no sentido horizontal.

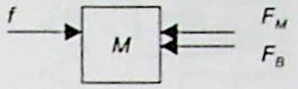


Figura 3.7 Forças horizontais do sistema.

Aplicando as leis de Newton, a força de atrito e a lei de D'Alembert vem,

$$F_M + F_B - f = 0 \text{ ou } M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = f(t)$$

ou ainda $Msv(s) + Bv(s) = f(s)$, onde $v(s)/f(s)$ representa a função de transferência do sistema (a velocidade resultante devido a força aplicada).

$$\frac{v(s)}{f(s)} = \frac{1}{Ms + B} \tag{3.5}$$

EXEMPLO 3.6

Sistema de Amortecimento. Este tipo de sistema é empregado como base para estudos de dispositivos de suspensão automotiva. A figura 3.8 ilustra um sistema de suspensão típico simplificado: M representa a massa de um veículo distribuída em cada eixo de suspensão (sob cada roda do mesmo); K é a constante do feixe de mola sob uma das rodas; B é a constante de atrito do amortecedor correspondente; u é o deslocamento vertical que ocorre em um pneu (roda) quando o mesmo sofre ações de irregularidades do pavimento (ruas ou estradas) por onde o veículo se desloca devido a buracos, lombadas, etc.; y é o deslocamento vertical resultante no veículo devido ao deslocamento do respectivo pneu ou roda. Um sistema de amortecimento tem como finalidade amortecer os movimentos verticais resultantes no veículo.

A força do peso associada ao sistema é anulada pela força normal resultante da reação de cada roda com a superfície do pavimento. Os deslocamentos u e y do sistema provocam outras forças que podem ser expressas empregando-se leis físicas. O diagrama da figura 3.9 ilustra essas forças associadas ao modelo. Adotando a convenção do sentido de deslocamento indicado na figura 3.8 (para baixo), a força de reação da massa (F_M) é para cima. Nesta condição, a mola e o amortecedor estão sendo comprimidos, assim, as suas forças são aplicadas no sentido de baixo para cima. Os deslocamentos são relativos à diferença $y - u$.

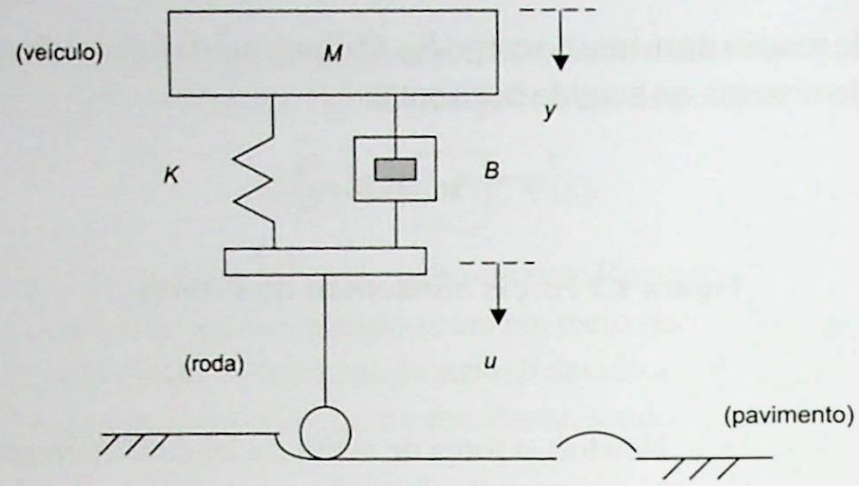


Figura 3.8 Sistema de Amortecimento.

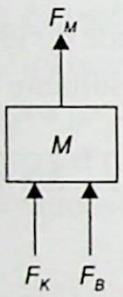


Figura 3.9 Forças verticais do sistema.

Equacionando, vem,

$$F_M + F_B + F_K = 0,\ M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{d}{dt}[y(t) - u(t)] + K[y(t) - u(t)] = 0.$$

Ou ainda

$$Ms^2y(s) + Bs[y(s) - u(s)] + K[y(s) - u(s)] = 0,$$

resultando na função (3.6).

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} \tag{3.6}$$

EXEMPLO 3.7

Sistema de Amortecimento Ampliado. A modelagem exemplificada agora utiliza um modelo mais detalhado do que o empregado no exemplo anterior, incorporando também a massa M_r da roda e a elasticidade K_p do pneu (figura 3.10).

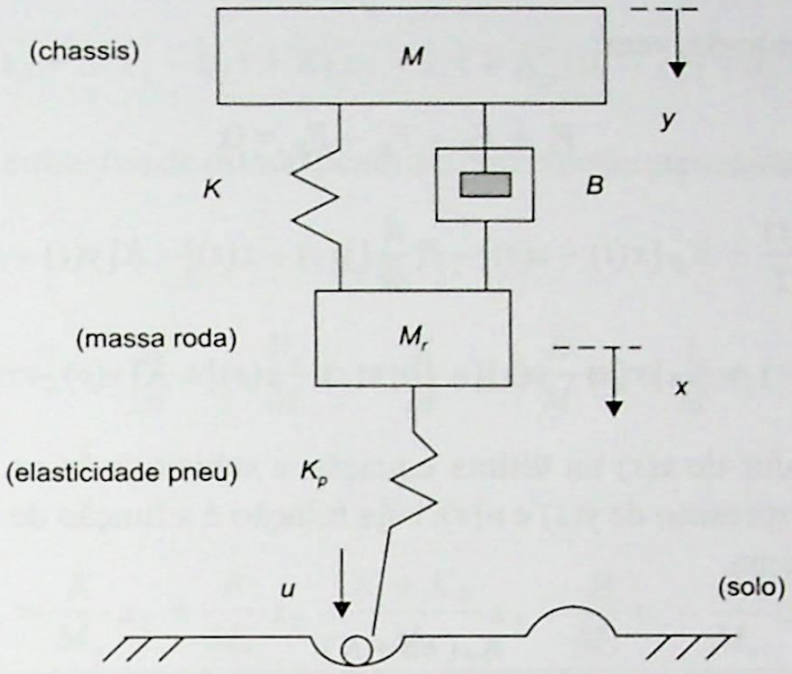


Figura 3.10 Sistema de amortecimento ampliado.

Além dos deslocamentos analisados anteriormente na carroceria do veículo (y) e no pneu (u), agora é considerado também o deslocamento do equivalente centro de massa da roda (x). As forças sobre a massa do veículo são as mesmas do exemplo anterior, no amortecedor e na mola. Os deslocamentos são relativos agora à diferença $y - x$. De maneira similar ao exemplo anterior, pode-se equacionar:

$$F_M + F_B + F_K = 0;\ M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{d}{dt}[y(t) - x(t)] + K[y(t) - x(t)] = 0;$$

$$Ms^2y(s) + Bs[y(s) - x(s)] + K[y(s) - x(s)] = 0.$$

As forças resultantes na roda estão ilustradas na figura 3.11. Na força equivalente à elasticidade do pneu, o deslocamento relativo é dado pela diferença $x - u$.

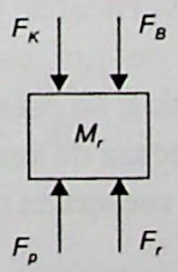


Figura 3.11 Forças resultantes na roda.

Equacionando, vem:

$$F_r + F_P - F_B - F_K = 0;$$

$$M_r \frac{d^2x(t)}{dtH2} + K_P[x(t) - u(t)] - B\frac{d}{dt}[y(t) - x(t)] - K[y(t) - x(t)] = 0;$$

$$M_r s^2 x(s) + K_P[x(s) - u(s)] - Bs[y(s) - x(s)] - K[y(s) - x(s)] = 0.$$

Isolando o valor de $x(s)$ na última equação e substituindo na anterior, obtém-se uma expressão de y(s) e $u(s)$, cuja relação é a função de transferência básica do sistema.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K_P(BS + K)}{(M_r M)s^4 + (M + M_r)Bs^3 + (MK_p + (M + M_r)K)s^2 + K_P Bs + KK_P} \quad (3.7)$$

Em veículos que utilizam técnicas de suspensão ativa são empregados dispositivos que fornecem forças adicionais de amortecimentos controlados. No modelo da figura 3.10, a força de amortecimento pode ser representada por um valor F_a aplicado entre a massa suspensa (chassis) e a roda correspondente, sendo que, na modelagem resultante, esse valor deve ser adicionado nas equações do modelo.

Este sistema também pode ser modelado por variáveis de estado. Aqui serão adotadas as seguintes substituições de variáveis:

$$x_1 = y; x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1; x_3 = x;\ x_4 = \dot{x} = \dot{x}_3; \ddot{x} = \dot{x}_4; \ddot{y} = x_2; u_1 = u; u_2 = f_a$$

A variável x_1 representa o deslocamento vertical da massa suspensa, x_2 a velocidade da mesma e a derivada da última a aceleração correspondente. A variável x_3 representa o deslocamento vertical da roda, x_4 a sua velocidade e a derivada desta a aceleração resultante. A variável u_1 expressa a perturbação no sistema, ou seja, o movimento vertical do pneu. A grandeza u_2 representa a força de atuação/compensação de um sistema de suspensão ativa (por exemplo, de um amortecedor ativo). Se esta entrada tiver valor sempre nulo ($F_a = 0$), isso representará um sistema de suspensão passiva convencional. As equações diferenciais podem ser reescritas como:

$$M\ \dot{x}_2 + B(x_2 - x_4) + K(x_1 - x_3) - u_2 = 0;$$

$$M_r \overset{\circ}{x}_4 + B(x_4 - x_2) + K(x_3 - x_1) + K_p(u_1 - x_3) - u_2 = 0.$$

Logo, as equações de estado ficam definidas pelas expressões seguintes:

$$\overset{\circ}{x}_1 = x_2;$$

$$\overset{\circ}{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{B_a}{M}x_2 + \frac{K}{M}x_3 + \frac{B}{M}x_4 + \frac{1}{M}u_2;$$

$$\overset{\circ}{x}_3 = x_4;$$

$$\overset{\circ}{x}_4 = \frac{K}{M_r}x_1 + \frac{B}{M_r}x_2 - \frac{K + K_P}{M_r}x_3 - \frac{B}{M_r}u_1 - \frac{1}{M_r}u_2.$$

3.3.2 SISTEMAS MECÂNICOS ROTACIONAIS

As variáveis ou grandezas físicas mais freqüentes para descrever o comportamento de sistemas mecânicos rotacionais são deslocamentos, velocidades ou acelerações angulares e torques. Os elementos básicos mais comuns desses sistemas são momentos de inércia, atritos viscosos e elasticidade rotacional. As relações que expressam os fenômenos básicos envolvidos em tais sistemas são representadas através de algumas equações bem conhecidas em mecânica e estão descritas a seguir.

- Lei de D'Alembert: A somatória de torques num corpo em equilíbrio rotacional é zero.
- Lei da ação e reação: A rotação de um corpo devido um torque (ação) produz uma reação (torque) de mesma intensidade em sentido contrário.
- Rotação devida a torques: Relaciona a aceleração, velocidade W ou deslocamento angular θ de um corpo com momento de inércia J devido à ação de um torque T, ou seja,

$$T(t) = J\frac{dW(t)}{dt} = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2},$$

ou

$$F(s) = sJW(s) = Js^2\theta(s).$$

- Fricção rotacional: Relaciona o torque T de atrito de um corpo com rotação W em um meio com coeficiente de atrito B, sendo

$$T(t) = BW(t) = B\frac{d\theta(t)}{dt},$$

ou ainda

$$T(s) = BW(s) = sB\theta(s).$$

- Efeito de mola rotacional: Relaciona o deslocamento (ou deformação) angular θ de um corpo com coeficiente de elasticidade rotacional K devido a um torque T, ou seja,

$$T(t) = K\theta(t), \text{ ou } T(s) = K\theta(s).$$

EXEMPLO 3.8

Sistema Inércia-Atrito. Este tipo de sistema é usado como modelo de turbinas, juntas de robôs, cargas mecânicas de motores, laminadores e outros. Um torque T aplicado em um corpo de momento de inércia J (devido a sua massa e geometria), mais um coeficiente de atrito B devido a mancais, engrenagens, etc., produz uma velocidade angular W em torno do seu eixo conforme ilustrado na figura 3.12.

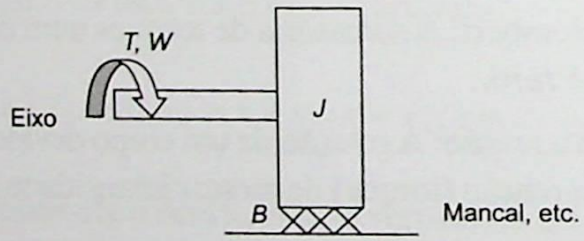


Figura 3.12 Sistema Inércia-Atrito.

O torque aplicado no sistema faz o mesmo girar em torno do seu eixo com uma determinada velocidade. Esse movimento produz um torque de reação devido à inércia e outro devido ao atrito do corpo com sua superfície ou meio de sustentação. A figura 3.13 ilustra os torques resultantes.

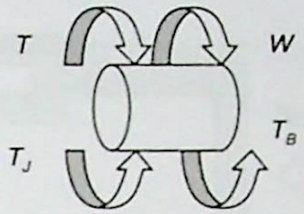


Figura 3.13 Torques resultantes.

Aplicando a lei de D'Alembert, vem:

$$T_J + T_B - T = 0, \text{ ou } J\frac{dW(t)}{dt} + BW(t) - T(t) = 0,$$

ou ainda

$$JsW(s) + BW(s) = T(s).$$

A razão $W(s)/T(s)$ é a função de transferência do sistema, que relaciona a rotação com o torque aplicado.

$$\frac{W(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + B} \tag{3.8}$$

EXEMPLO 3.9

Mecanismo de Posicionamento Angular. Este tipo de sistema modela dispositivos de posicionamento angular em máquinas ferramentas, antenas de radares, braços de robôs, etc. Na figura 3.14 tem-se uma ilustração típica. Um torque T_a proveniente de um mecanismo de acionamento transmite um torque T proporcional que desloca de um ângulo θ o sistema, por exemplo, o braço de um robô movimentando-se no plano horizontal. Ao sistema está associado um momento de inércia J e um coeficiente de atrito B proveniente do acoplamento de engrenagens, polias, etc. O torque transmitido ao sistema produz um movimento rotacional em torno do eixo onde foi aplicado o mesmo. Esse deslocamento produz um torque de reação associado ao momento de inércia do sistema, mais um torque devido ao coeficiente de atrito correspondente ao dispositivo de transmissão. A figura 3.15 ilustra os torques resultantes.

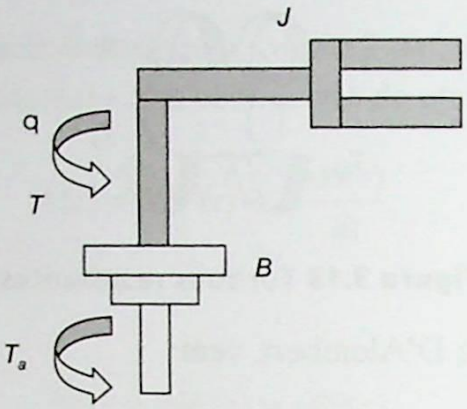


Figura 3.14 Sistema de posicionamento.

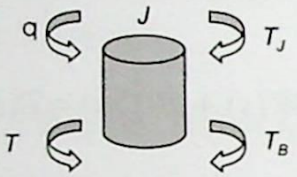


Figura 3.15 Torques resultantes.

Equacionando, vem

$$T_J + T_B - T = 0, J\frac{dW(t)}{dt} + BW(t) - T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} - T(t) = 0,$$

ou ainda

$$Js^2\theta(s) + Bs\theta(s) = T(s).$$

A relação $\theta(s)/T(s)$ é a função de transferência do sistema.

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)} \tag{3.9}$$

EXEMPLO 3.10

Pêndulo Mecânico. Este tipo de sistema pode modelar o braço de um robô em movimento pendular no plano vertical (figura 3.16), ou um processo de compensação de vibrações em edifícios e outros. Um torque T aplicado no sistema desloca o conjunto carga e braço (com um determinado comprimento L), com massas M_C e M_B, respectivamente, de um deslocamento θ. Essas massas podem ser associadas a uma massa equivalente M pontual concentrada no extremo do

comprimento do braço. O coeficiente de atrito do sistema é representado pelo parâmetro B.

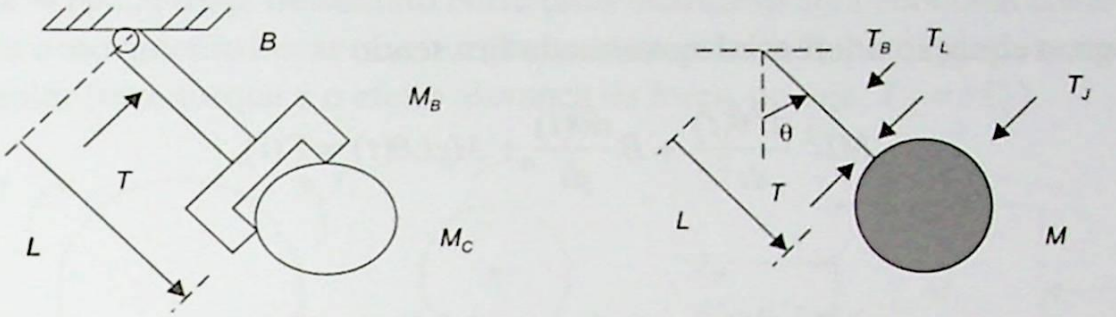


Figura 3.16 Sistema pendular e torques associados.

O momento de inércia correspondente à massa equivalente pode ser representado aproximadamente por $J = ML^2$. Devido ao deslocamento angular θ existe um torque de inércia associado T_J, um outro de atrito T_B, mais um torque T_L ocasionado pelo efeito alavanca do sistema, determinado pela componente do peso Mg (onde g é a aceleração da gravidade) vezes a projeção do comprimento do braço $Lsen(\theta)$. Aplicando a lei de D'Alembert, vem:

$$T_J + T_B + T_L - T = 0,$$

ou ainda

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + MgLsen(\theta(t)) - T(t) =$$

$$= ML^2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + MgLsen(\theta(t)) = T(t)$$

A equação diferencial obtida para modelagem do sistema apresenta um termo não-linear ($sen(\theta(t))$). Os métodos de soluções gerais para equações diferenciais não se aplicam em equações não-lineares. Uma das formas de resolver essa equação é através de cálculo numérico, ou então obter uma aproximação linear da função não-linear em torno de um ponto de operação (θ_0) do sistema. Isso pode ser realizado utilizando o primeiro termo de uma série de Taylor na função não-linear conforme ilustrado abaixo. Para exemplificar seja um valor de operação próximo de θ_0=0, pode-se escrever

$$f(\theta) \cong f(\theta_0) + \frac{df(\theta)}{d\theta}_{\theta=\theta_0}(\theta - \theta_0), \text{ ou } sen(\theta(t)) \cong sen(\theta_0) + cos(\theta_0)(\theta(t) - \theta_0),$$

ou então

$$sen(\theta(t)) \cong \theta(t).$$

Logo, a equação diferencial aproximada fica sendo

$$ML^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + MgL\theta(t) = T(t),$$

ou

$$ML^2 s^2\theta(s) + Bs\theta(s) + MgL\theta(s) = T(s).$$

A relação $\theta(s)/T(s)$ é a função de transferência aproximada do sistema.

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{(ML^2 s^2 + Bs + MgL)} \tag{3.10}$$

EXEMPLO 3.11

Sistema de Transmissão Mecânica. Este sistema é usado em algumas máquinas ferramentas e alguns tipos de robôs. Sua finalidade é converter deslocamentos angulares em movimentos lineares. É composto por partes translacionais e rotacionais, como mostrado na figura 3.17. A engrenagem esférica (em tom cinza) de raio r transmite o movimento para a engrenagem plana. Estes elementos são conhecidos como pinhão e cremalheira, o corpo da última é chamado de carro.

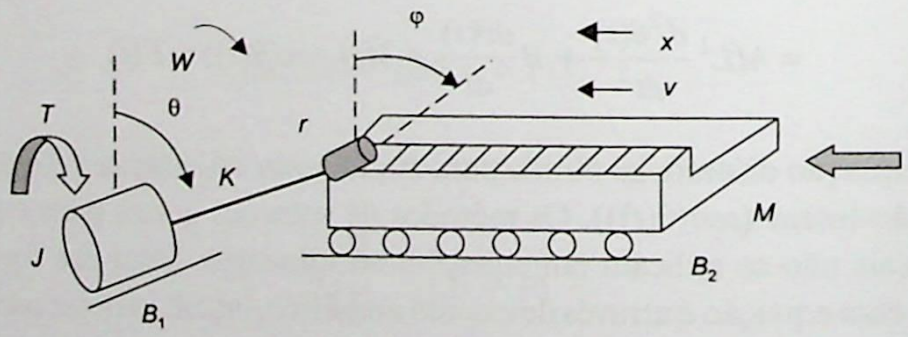


Figura 3.17 Sistema de transmissão mecânica.

O equacionamento do sistema pode ser realizado considerando-se três partes: o deslocamento rotacional da parte com momento de inércia J, representando um dispositivo de acionamento; o movimento linear da parte do carro representado por um conjunto com massa M; o eixo que liga as duas partes anteriores expresso pelo coeficiente elástico K. Em cada uma das partes

é equacionada a somatória das forças ou torques envolvidos (figura 3.18). A relação dos deslocamentos entre o pinhão e a cremalheira é expresso através de $x = r\varphi$. A força de contato entre estes elementos será denotada como F_C para o movimento linear e um torque correspondente T_C para o deslocamento angular (esse torque é o efeito alavanca da força, ou seja, $T_C = rF_C$).

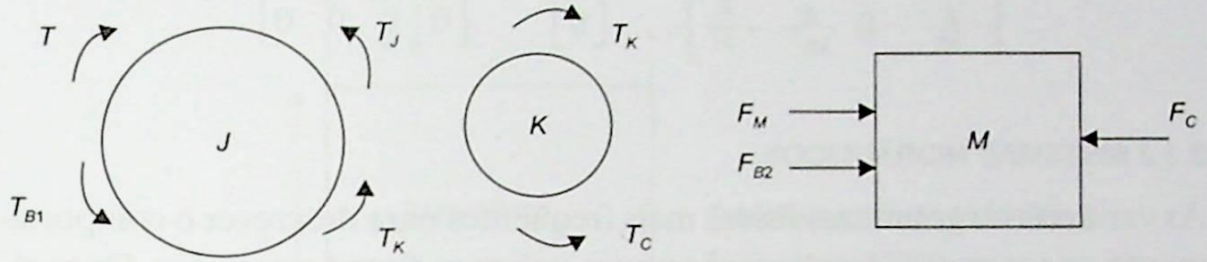


Figura 3.18 Forças e torques resultantes.

Equacionando, vem:

$$T_J + T_{B1} + T_K - T = 0; \quad T_C - T_K = 0; \quad F_M + F_{B2} - F_C = 0.$$

Ou ainda:

$$JW' + B_1 w + K(\theta - \varphi) - T = 0;\ rF_C - K(\theta - \varphi) = 0;\ MV' + B_2 v - F_C = 0.$$

Substituindo F_C entre as duas últimas equações e sabendo que $x = r\varphi$, vem:

$$JW' + B_1 w + K\theta - \frac{K}{r}x - T = 0;\ MV' + B_2 v + \frac{K}{r^2}x - \frac{K}{r}\theta = 0.$$

Essas duas equações diferenciais do modelo podem ser representadas em funções de transferência ou em variáveis de estado. Definindo-se as variáveis: $x_1 = \theta = y_1;\ x_2 = w;\ x_3 = x = y_3;\ x_4 = v;\ u = T$; tem-se (3.11).

$$\begin{aligned}
&\theta' = w; && x'_1 = x_2;\\
&w' = \frac{1}{J}(-K\theta - B_1 w + \frac{K}{r}x) + \frac{1}{J}T; && x'_2 = -\frac{K}{J}x_1 - \frac{B_1}{J}x_2 + \frac{K}{Jr}x_3 + \frac{1}{J}u;\\
&x' = v; && x'_3 = x_4;\\
&v' = \frac{1}{M}(\frac{K}{r}\theta - \frac{K}{r^2}x - B_2 v); && x'_4 = \frac{K}{Mr}x_1 - \frac{K}{Mr^2}x_3 - \frac{B_2}{M}x_4;
\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Em representação matricial, pode-se escrever: $\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx + Du;$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B_1}{J} & \frac{K}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{Mr} & 0 & \frac{K}{Mr^2} & -\frac{B_2}{M} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D = 0.$$

3.3.3 SISTEMAS HIDRÁULICOS

As variáveis ou grandezas físicas mais freqüentes para descrever o comportamento de sistemas hidráulicos são níveis, volumes, fluxos e pressões. Os parâmetros típicos desses sistemas são as resistências e as capacitâncias hidráulicas. As relações que expressam os fenômenos básicos envolvidos são representadas através de algumas equações bem conhecidas e estão descritas a seguir.

- Resistência hidráulica R: Relaciona a vazão q de um fluido em uma tubulação de um reservatório com um dado desnível h, ou $R = dh/dq$. Se o escoamento for laminar (vazão não turbulenta) a relação é linear, ou seja, $q(t) = h(t)/R$. Analogamente a sistemas elétricos, este parâmetro indica a oposição (resistência) à passagem de um fluido.
- Capacitância hidráulica C: Relaciona a variação da vazão Δq de um fluido pela taxa de variação do seu nível h no tempo t em um reservatório, sendo $C = \Delta q(t)/(dh(t)/dt)$. Este parâmetro pode ser interpretado como sendo a variação no volume do líquido armazenado necessária para causar uma variação unitária em seu nível. Também pode ser visto como a capacidade de armazenamento do sistema, dependendo das dimensões e da geometria do reservatório.

EXEMPLO 3.12

Sistema de Nível. Este sistema é muito utilizado como modelo básico de reservatórios ou colunas de nível em processos hidráulicos, petroquímicos, etc. A vazão de entrada q_i representa o fluxo de uma válvula de controle que comanda a admissão de um fluido em um reservatório. A vazão de saída q_o expressa o escoamento do fluido para um outro dispositivo ou processo da qual geralmente não se tem controle. Como conseqüência o nível h do reservatório ou tanque é alterado, o esquema da figura 3.19 serve como ilustração. O parâmetro R está associado à resis-

tência da passagem do fluido pela tubulação e na válvula de escape. O parâmetro C está associado à capacidade de armazenamento do tanque.

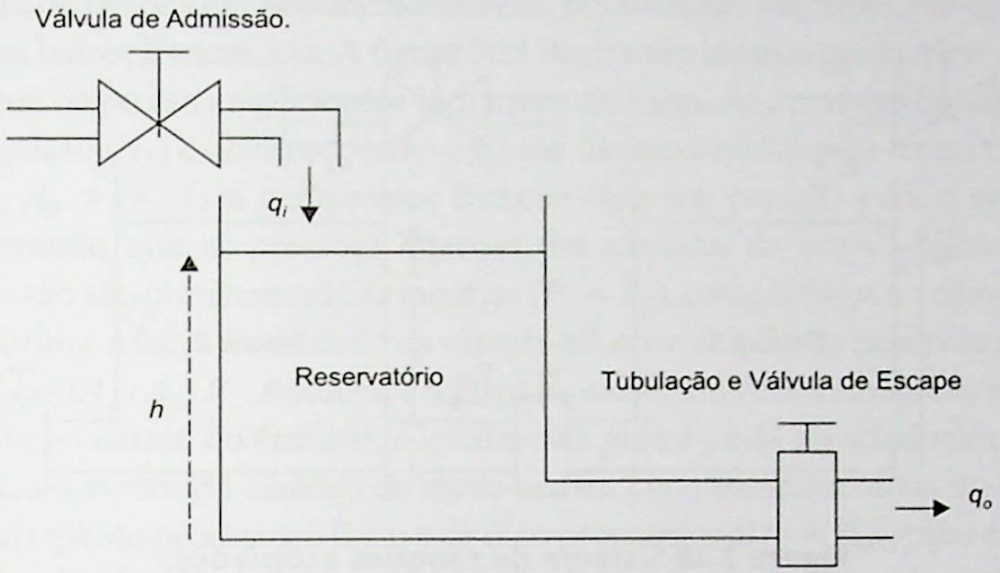


Figura 3.19 Sistema de nível.

A variação de vazão pode ser convencionada como $\Delta q(t) = q_i(t) - q_o(t)$, e usando as definições de resistência e capacitância hidráulica, pode-se escrever

$$C\frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) = q_i(t) - \frac{h(t)}{R}, \text{ ou ainda } sRCh(s) + h(s) = Rq_i(s).$$

A relação $h(s)/q_i(s)$ é a função de transferência do sistema que relaciona a variação de nível do reservatório em função da vazão de entrada.

$$\frac{h(s)}{q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \tag{3.12}$$

EXEMPLO 3.13

Sistema de Tanques Acoplados. Este exemplo é semelhante ao anterior, mas agora contém dois tanques ou reservatórios acoplados entre si (figura 3.20).

De maneira similar ao exemplo anterior, pode-se equacionar:

$$C_1\frac{dh_1(t)}{dt} = q_{i1}(t) - q_{o1}(t) = q_{i1}(t) - \frac{(h_1(t) - h_2(t))}{R_1},$$

$$C_2\frac{dh_2(t)}{dt} = q_{o1}(t) + q_{i2}(t) - q_{o2}(t) = \frac{(h_1(t) - h_2(t))}{R_1} + q_{i2}(t) - \frac{h_2(t)}{R_2}.$$

Definindo as variáveis: $x_1 = h_1 = y_1$; $x_2 = h_2 = y_2$; $u_1 = q_{i1}$; $u_2 = q_{i2}$. Em representação matricial (neste caso a matriz D é nula), têm-se (3.13).

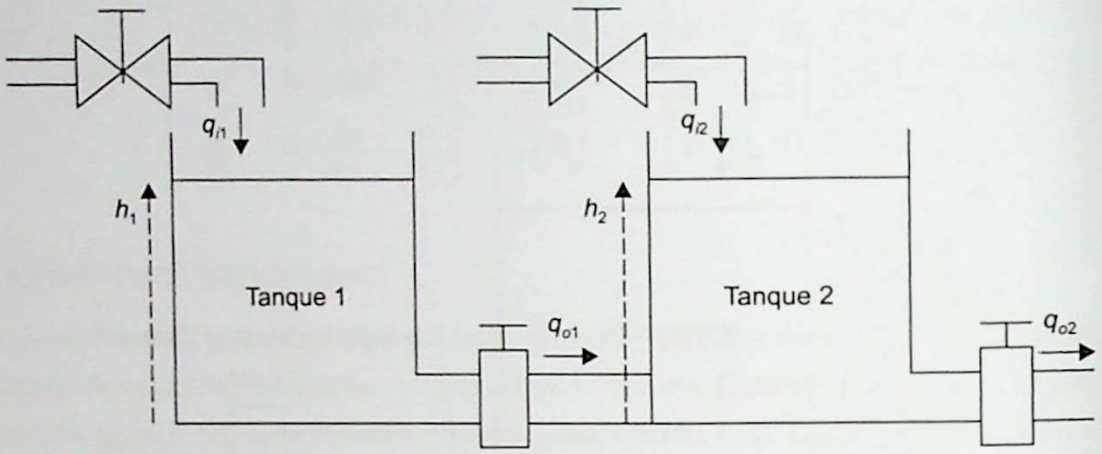


Figura 3.20 Sistema de tanques acoplados.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Este sistema possui duas entradas ($u_1 = q_{i1}$ e $u_2 = q_{i2}$) e duas saídas ($y_1 = h_1$ e $y_2 = h_2$), e pode ser representado também na forma de matriz de funções de transferência, conforme ilustrado abaixo, sabendo-se que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{g}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$g(s) = \frac{R_2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2(C_1 + C_2))s + 1} * \begin{bmatrix} (R_1 C_2 s + 1 + R_1 / R_2) & 1 \\ 1 & (R_1 C_1 s + 1) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

EXEMPLO 3.14

Servo-Pistão Hidráulico. Este dispositivo é usado como atuador no comando de admissão de fluidos em pistões hidráulicos, em sistemas robóticos, em turbinas de usinas hidroelétricas, etc. A figura 3.21 ilustra um arranjo típico. Esse dispositivo atua como um amplificador hidráulico de força. As áreas dos cilindros da válvula piloto (A_1) e do servo pistão (A_2) são dimensionadas para terem valores tais que $A_2 > A_1$. Um compressor fornece óleo sob pressão para o sistema. Considerando que as pressões internas das câmaras da válvula-piloto e do servo-pistão são praticamente as mesmas ($P_1 \approx P_2$), então a força no cilindro do servo-pistão é a força do êmbolo da válvula-piloto multiplicada pela relação das áreas: $F_2 = (A_2/A_1)F_1$. Associada à força F_1, existe um deslocamento x_1 correspondente ao cursor do êmbolo, e igualmente para F_2 está associado um movimento x_2 no cursor do cilindro do servo-pistão. Um deslocamento x_1 no cursor da válvula-piloto produz um fluxo q de óleo proporcional ($q = K_p x_1$) que é transferido da válvula-piloto para o servo-pistão, impulsionando assim o seu cilindro de atuação.

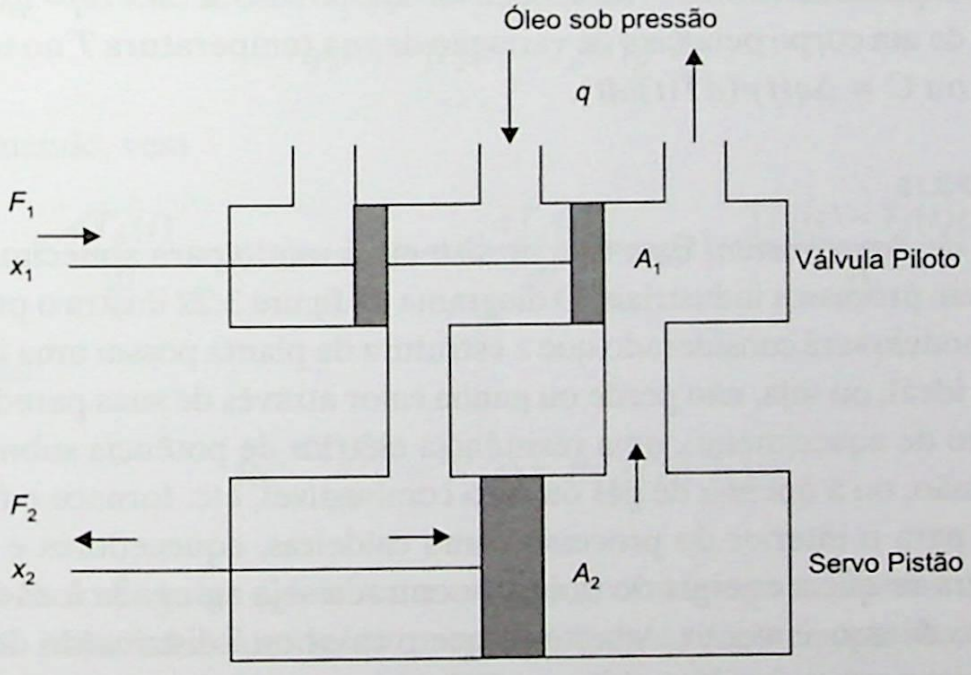


Figura 3.21 Servo-Pistão.

A vazão no servo-pistão está relacionada com o deslocamento do seu cilindro conforme a expressão $q = DA_2(dx_2/dt)$, onde D é a densidade do óleo.

Logo, $DA_2(dx_2/dt) = K_p x_1$, ou ainda $sDA_2x_2(s)/dt) = K_p x_1(s)$. A relação $x_2(s)/x_1(s)$ é a função de transferência do sistema que relaciona os deslocamentos das hastes do mecanismo, onde $K = K_p/DA_2$.

$$\frac{x_2(s)}{x_1(s)} = \frac{K}{s} \tag{3.15}$$

3.3.4 SISTEMAS TÉRMICOS

As variáveis ou grandezas físicas mais usuais para descrever o comportamento de sistemas térmicos são temperatura e fluxo de calor. Os elementos típicos desses sistemas são a resistência e a capacitância térmica. As relações que expressam os fenômenos básicos envolvidos nesses sistemas são modeladas através de algumas equações bem conhecidas em termodinâmica e estão descritas a seguir.

- Resistência térmica R: Relaciona o fluxo de calor q que passa através de um determinado corpo (ou meio) devido a uma diferença de temperatura $\Delta T(t) = T_i(t) - T_o(t)$ entre os extremos do corpo, ou seja, $q(t) = \Delta T(t)/R$. Analogamente a sistemas elétricos, este parâmetro indica a oposição (resistência) à passagem de calor.
- Capacitância térmica C: Relaciona a variação do fluxo de calor $\Delta q = q_i(t) - q_o(t)$ de um corpo pela taxa de variação da sua temperatura T no tempo t, ou $C = \Delta q(t)/(dT(t)/dt)$.

EXEMPLO 3.15

Sistema de Aquecimento. Este tipo de sistema é usado para aquecimento de fluidos em processos industriais. O diagrama da figura 3.22 ilustra o processo. Nesse modelo será considerado que a estrutura da planta possui uma isolação térmica ideal, ou seja, não perde ou ganha calor através de suas paredes. Um elemento de aquecimento, uma resistência elétrica de potência submetida a uma tensão, ou à queima de gás ou óleo combustível, etc. fornece o fluxo de calor q_i para o interior do processo como caldeiras, aquecedores e outros. Considera-se que a energia do fluido de entrada seja agregada à energia do elemento de aquecimento. Admite-se que o calor está distribuído de forma homogênea no interior do recipiente. O fluido entra com uma temperatura T_i e é aquecido a uma temperatura T_o saindo do sistema para um outro processo.

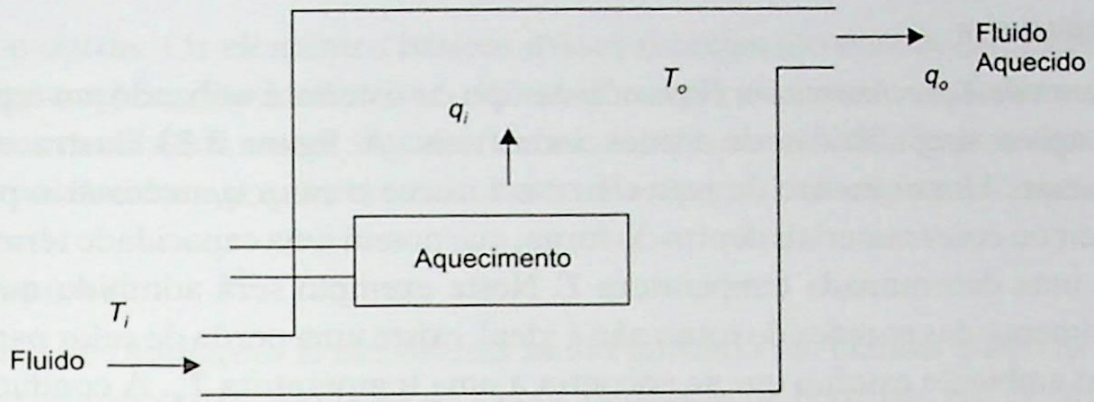


Figura 3.22 Sistema de aquecimento.

Usando a expressão da capacidade térmica, vem:

$$C = \frac{dT_o(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t).$$

Aplicando a relação da resistividade térmica do conjunto, obtém-se:

$$q_o(t) = [T_i(t) - T_o(t)] / R.$$

Combinando, vem

$$C\frac{dT_o(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) = C\frac{dT_o(t)}{dt} = q_i(t) - \frac{[T_o(t) - T_i(t)]}{R}$$

ou então:

$$RC\frac{dT_o(t)}{dt} = T_o(t) = Rq_i(t) + T_i(t) \tag{3.16}$$

O fluxo de calor q_i fornece a energia necessária para elevar a temperatura do material na saída do processo, essa energia é considerada uma entrada do sistema. A temperatura T_i é considerada uma outra entrada, uma variação do processo. Uma outra maneira de representar esse modelo é por meio de variável de estado. Fazendo a substituição das variáveis $x_1 = T_o$, $u_1 = q_i$, $u_2 = T_i$, obtém-se (3.17).

$$x'_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}u_1 + \frac{1}{RC}u_2 \tag{3.17}$$

EXEMPLO 3.16

Sistema de Aquecimento em Fornos. Este tipo de sistema é utilizado em representações simplificadas de fornos industriais. A figura 3.23 ilustra esse processo. Um elemento de aquecimento fornece o calor q_i necessário para fundir ou cozer materiais dentro do forno, que possui uma capacidade térmica C e uma determinada temperatura T. Neste exemplo será admitido que o isolamento das paredes do forno não é ideal, existe uma perda de calor para o meio ambiente externo que se encontra a uma temperatura T_a. A condutividade é representada por uma resistência térmica R.

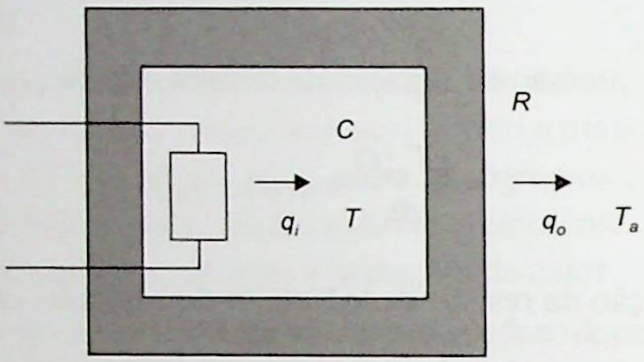


Figura 3.23 Sistema de aquecimento.

Aplicando as relações de capacitância e resistência térmica, vem:

$$C\frac{dT(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) = C\frac{dT(t)}{dt} = q_i(t) - \frac{[T(s) - T_a(s)]}{R}.$$

Admitindo na prática que T_a seja bem menor que T_o, vem:

$$C\frac{dT(t)}{dt} = q_i(t) - \frac{T(t)}{R} \text{ ou } RCsT(s) + T(s) = Rq_i(t),$$

obtendo-se a função (3.18).

$$\frac{T_o(s)}{q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \tag{3.18}$$

3.4 SISTEMAS QUÍMICOS

As principais variáveis ou grandezas usadas para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos químicos são fluxo de calor, pressão, vazão, tempera-

tura e outras. Os elementos básicos desses sistemas são massas (ou moles), concentrações, densidades, etc. As relações que expressam os fenômenos básicos envolvidos nestes sistemas são modeladas através de algumas expressões conhecidas em química e são ilustradas a seguir com alguns exemplos.

EXEMPLO 3.17

Coluna de Destilação. É um sistema muito utilizado em plantas químicas ou petroquímicas para obtenção de álcool, derivados de petróleo, etc. A figura 3.24 serve como ilustração deste tipo de processo. Os produtos a serem obtidos como álcool ou gasolina, óleo diesel e outros são derivados de matérias primas como celulose, petróleo, etc. Essas matérias são compostas por várias substâncias que são fracionadas por processos de destilação decorrentes do fornecimento de calor (por exemplo, vapor). O equipamento usualmente utilizado é conhecido como coluna ou torre de destilação, sendo constituído por várias chapas ou lâminas metálicas dispostas em camadas. A mistura a ser decomposta é vazada através dessas lâminas que são aquecidas com de fluxo de vapor. Os produtos mais voláteis evaporam e deslocam para as partes de cima do equipamento, os produtos menos voláteis ou mais densos precipitam nas partes mais baixas da coluna.

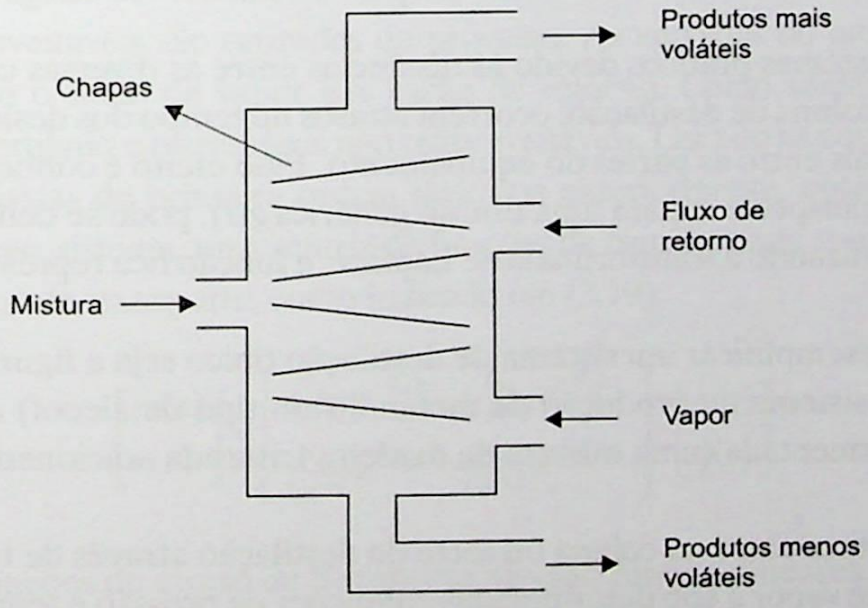


Figura 3.24 Coluna de destilação.

Os produtos que passam pelas chapas ou lâminas do processo estão representados na figura 3.25, onde q_i representa uma parcela do fluxo de calor devido ao vapor, x_i e y_i representam frações das componentes da mistura, e F_i

expressa os fluxos ou vazões dessas componentes. As partes da notação referente aos índices -1 e $+1$, representam os instantes de tempo anteriores e posteriores das variáveis em questão.

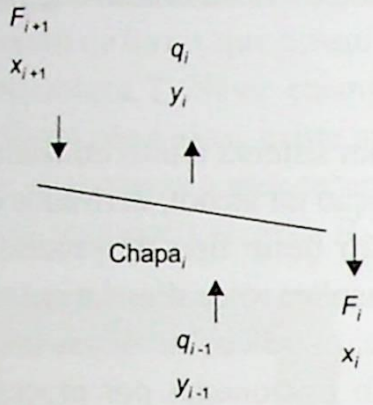


Figura 3.25 Processo de destilação.

As equações básicas de modelagem desse processo são dadas por equações diferenciais de primeira ordem como:

$$\frac{d}{dt}(F_i x_i) = F_{i+1} x_{i+1} - F_i x_i + q_{i-1} y_{i-1} - q_i y_i .$$

Em sistemas práticos devido às distâncias entre as diversas camadas de chapas da coluna de destilação, ocorrem atrasos no tempo dos deslocamentos dos materiais entre as partes do equipamento. Esse efeito é conhecido como atraso de transporte e, para uma função genérica $g(t)$, pode se denotado por, $g(t-T_o)$. Utilizando a transformada de Laplace, a função fica representada por $g(s)e^{-sTo}$.

Para exemplificar um sistema de destilação típico seja a figura 3.26. Ela ilustra um sistema de produção de metanol (um tipo de álcool) a partir de celulose fermentada (uma mistura de madeira triturada adicionada à água e fermento).

A mistura entra na coluna ou torre de destilação através de tubulações. Um fluxo de vapor q sob determinadas condições de pressão e temperatura é distribuído através de tubos e aquece a substância com a finalidade de separar o álcool da mistura da celulose fermentada. Por processo de evaporação, o metanol é fracionado, separando-se da mistura numa proporção m que é deslocada para o alto do equipamento, onde o mesmo é condensado e extraído. A parte não condensada n retorna ao equipamento com a finalidade de aumentar o rendimento de extração, realimentando o processo.

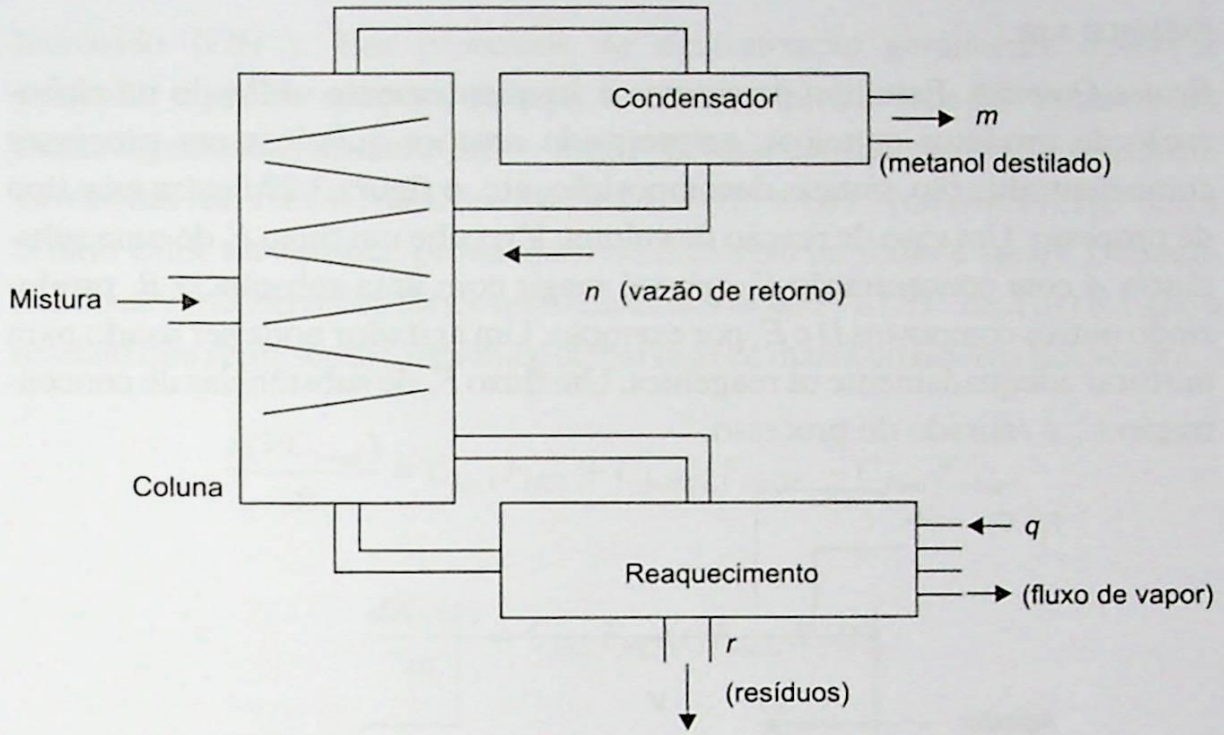


Figura 3.26 Processo de destilação de metanol.

Os resíduos resultantes precipitam para a parte de baixo do equipamento. A água agregada aos resíduos é reaquecida retornando ao sistema. Resíduos *r* não reaproveitáveis são retirados do processo. As entradas do modelo desse sistema são o fluxo de vapor e a vazão de retorno. Como saídas, têm-se o metanol destilado e os resíduos não reaproveitáveis. Usando as equações diferenciais básicas de primeira ordem descritas anteriormente, obtém-se como modelo desse sistema, uma matriz de funções de transferência com os respectivos atrasos de transporte, como indicado em (3.19).

$$\begin{bmatrix} m(s) \\ r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{\tau_1 s+1} e^{-T_1 s} & \frac{K_2}{\tau_2 s+1} e^{-T_2 s} \\ \frac{K_3}{\tau_3 s+1} e^{-T_3 s} & \frac{K_4}{\tau_4 s+1} e^{-T_4 s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n(s) \\ q(s) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

As funções de atraso de transporte não são funções lineares. Para obter um modelo aproximadamente linear, pode-se empregar a aproximação de Padé, onde cada exponencial pode ser aproximada por uma função de transferência com um pólo e um zero:

$$e^{-sT_o} \cong \frac{1 - \frac{T_o}{2} s}{1 + \frac{T_o}{2} s}.$$

EXEMPLO 3.18

Reator Químico. Este tipo de sistema é freqüentemente utilizado na elaboração de produtos químicos, empregando reações químicas em processos como neutralização, síntese, decomposição, etc. A figura 3.27 ilustra esse tipo de processo. Um vaso de reação de volume V recebe um fluxo F_i de uma substância A com concentração C_i que vai reagir com uma substância B, produzindo outros compostos D e E, por exemplo. Um agitador pode ser usado para misturar adequadamente os reagentes. Um fluxo F_o de substâncias de concentração C_o é retirado do processo.

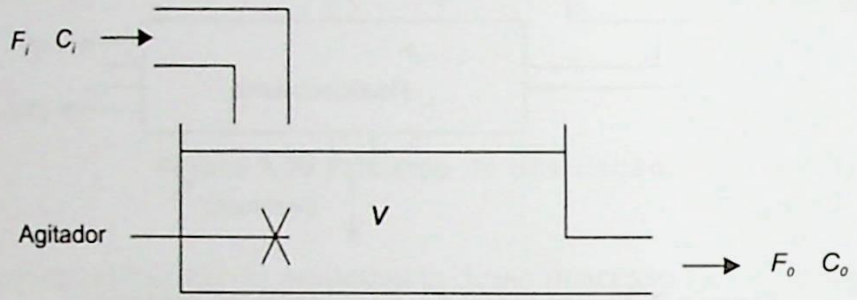


Figura 3.27 Vaso de reação.

As equações básicas de modelagem são dadas pelas expressões:

$$A + B \rightarrow C + D;$$

$$\frac{d(VC_{A_o})}{dt} = F_i C_{Ai} - (F_o C_{A_o} + KVC_A C_B);$$

$$\frac{d(VC_{B_o})}{dt} = F_i C_{Bi} - (F_o C_{B_o} + KVC_A C_B);$$

$$\frac{d(VC_{C_o})}{dt} = F_o C_{A_o} + KVC_A C_B - F_o C_{C_o} +);$$

$$\frac{d(VC_{D_o})}{dt} = F_o C_{A_o} + KVC_A C_B - F_o C_{D_o}.$$

Onde K é uma constante de proporcionalidade.

Para exemplificar, seja um processo de neutralização que tenha como reagentes um ácido e uma base, por exemplo, soluções aquosas de cloreto de hidrogênio (ácido clorídrico) e hidróxido de sódio (soda cáustica). A solução de ácido clorídrico (HCl) é composta por íons de hidrogênio (H^+) e de cloro (Cl^-). A solução de soda cáustica ($NaOH$) é composta por íons de sódio (Na^+) e de

hidróxido (OH^-). Em processos de neutralização geralmente deseja-se controlar o pH do sistema, ou seja, a concentração de íons H^+ expressa em escala logarítmica, tal como $pH = -log[H^+]$. Nesse exemplo, as reações químicas envolvidas são $HCl + NaOH \rightarrow Na^+ + Cl^- + H^+ + OH^-$ (ou $NaCl + H_2O$ se for cedido calor ao sistema, produzindo o sal cloreto de sódio e água). Denominando as concentrações totais respectivas dos íons H^+ e OH^- de $X_1(t)$ e $X_2(t)$, o modelo que representa a dinâmica do balanço de massa do sistema fica sendo:

$$\frac{d(VC_{total})}{dt} = C_{HCl}F_{HCl} + C_{NaOH}F_{NaOH} - C_{final}F_{saída};$$

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = C_{HCl}F_{HCl}(t)F_{saída}X_1(t);$$

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = C_{NaOH}F_{NaOH}(t) - F_{saída}X_2(t).$$

Denotando $Y(t) = X_1(t) - X_2(t)$ e considerando que o volume V é mantido constante (através do controle de nível do vaso), juntando as equações, vem:

$$V\frac{dY(t)}{dt} = C_{HCl}F_{HCl}(t) + C_{NaOH}F_{NaOH}(t) - KY(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace e denominando $\tau = V/K$, $K_1 = C_{HCl}/K$ e $K_2 = C_{NaOH}/K$, obtém-se o modelo do sistema.

$$Y(s) = \frac{K_1}{\tau s + 1}F_{HCl}(s) + \frac{K_2}{\tau s + 1}F_{NaOH}(s) \qquad (3.20)$$

O pH do sistema fica definido agora como segue, onde a constante Kw é o produto das concentrações dos íons de H^+ e OH^-:

$$pH = -\log\left(\frac{Y + \sqrt{Y^2 + 4Kw}}{2}\right).$$

3.5 SISTEMAS DIVERSOS

Alguns sistemas práticos são modelados como associações de modelos básicos de sistemas elétricos, eletrônicos, mecânicos, térmicos, químicos, etc. Com o objetivo de ilustrar este item, serão vistos alguns exemplos.

3.5.1 CONTROLADORES ELETRÔNICOS ANALÓGICOS

Os controladores/compensadores eletrônicos analógicos são constituídos por elementos passivos, como resistores e capacitores juntamente com circuitos ativos a semicondutores. Entre os dispositivos ativos frequentemente utilizados estão os amplificadores operacionais usualmente empregados em instrumentação eletrônica e sistemas de controle convencionais, entre os quais se destacam os filtros ativos e os controladores/compensadores tipo *PID* (Proporcional-Integral-Derivativo) ou *Lead/Lag* (avanço/atraso de fase). A figura 3.28 ilustra a estrutura básica destes circuitos que são compostos por impedâncias (*Zi* e *Zo*) e por um (ou mais) amplificador operacional.

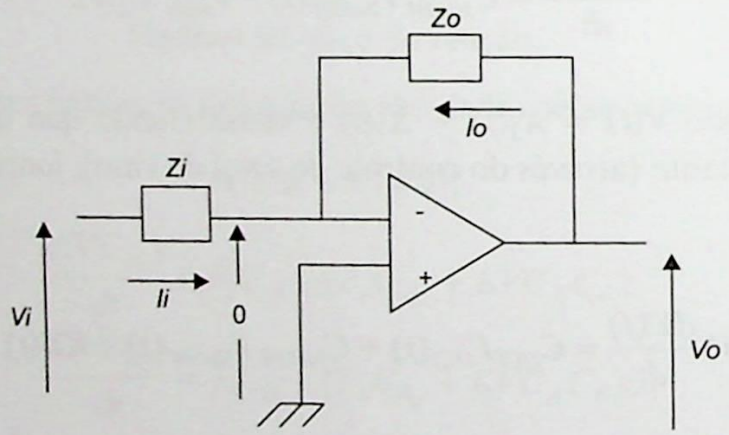


Figura 3.28 Estrutura básica de um compensador.

Considerando que a impedância de entrada do amplificador operacional é muito grande, as correntes nos pinos das entradas são muito pequenas. Conseqüentemente, a diferença de potencial entre os mesmos é bem pequena, idealmente 0 [*V*]. Assim, as correntes que passam nas impedâncias são $Ii = Vi/Zi$ e $Io = Vo/Zo$. A somatória das mesmas é $Ii + Io = 0$, resultando em $Vi/Zi + Vo/Zo = 0$, que define a função de transferência geral (3.21).

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\frac{Zo(s)}{Zi(s)} \tag{3.21}$$

EXEMPLO 3.19

Controlador PI. Controladores *PI* são empregados em vários sistemas de controle. A figura 3.29 ilustra uma estrutura básica com implementação analógica.

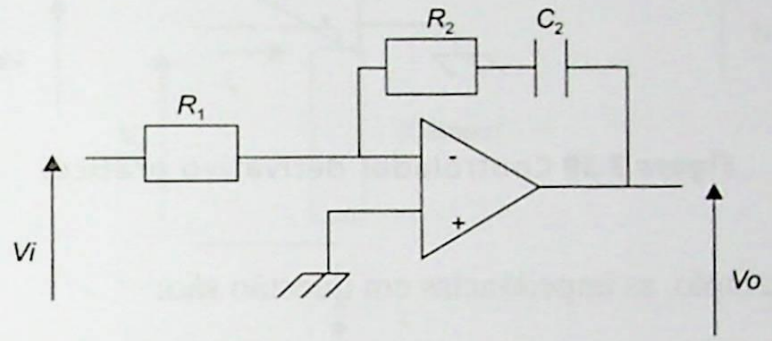


Figura 3.29 Compensador *PI*.

As impedâncias do circuito são modeladas como $Zi = R_1$ e $Zo = R_2 + 1/sC_2$. Usando a expressão (3.21), vem:

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\frac{R_2 + 1/sC_2}{R_1}.$$

ou na forma de:

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\left[\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C_2 s}\right]. \tag{3.22}$$

A função de transferência obtida mostra o motivo do nome proporcional e integral do controlador. A relação R_2/R_1 representa a parte proporcional do compensador e recebe a denominação de ganho proporcional. Essa parcela promove amplificações em sinais se a razão for maior que 1, ou atenuações se for menor que a unidade. O termo $1/s$ representa a parte integral da função no domínio do tempo, onde o parâmetro R_1C_2 é conhecido como tempo de integração ou o inverso deste é chamado de ganho integral.

EXEMPLO 3.20

Controlador Derivativo. Este tipo de controlador é utilizado em implementações analógicas de malhas de controle, a figura 3.30 ilustra o circuito típico.

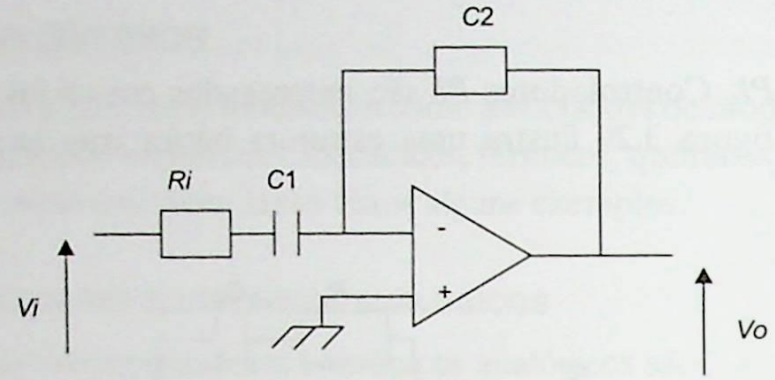


Figura 3.30 Controlador derivativo prático.

Neste exemplo, as impedâncias em questão são:

$$Zi = R_i + 1/sC_1 \text{ e } Zo = R_2.$$

Usando a expressão (3.21), vem

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\frac{R_2}{R_i + 1/sC_1},$$

ou então a função de transferência:

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\left[\frac{sR_2C_1}{R_iC_1s + 1}\right]. \tag{3.23}$$

Se a resistência R_i for nula, a função de transferência é a de um compensador derivativo ideal, ou $Vo(s)/Vi(s) = sR_2C_1$ (o termo s representa a parte derivativa, e o parâmetro R_2C_1 é conhecido como tempo ou ganho derivativo). O problema é que esse arranjo pode amplificar sinais de ruído de alta freqüência agregados ao sinal de entrada. Com a finalidade de minimizar esse efeito na prática, são utilizados valores de resistência de entrada (R_i) até dez vezes menores que a resistência de realimentação (R_2), garantindo dessa maneira limitações de ganhos para altas freqüências (o circuito resultante é um filtro passa-altas).

3.5.2 SISTEMA SERVO-MOTOR ELÉTRICO

Este sistema é freqüentemente utilizado em mecanismos de atuação elétrica para máquinas ferramentas, em robôs, em acionamento de veículos elétricos, laminadores em indústrias siderúrgicas, etc. São compostos por servo-motores

elétricos (em geral motores de corrente contínua) acoplados aos dispositivos nos quais se deseja acionar (articulações de robôs, mecanismos de transmissão de veículos, cilindros de laminadores e outros). Os dispositivos acionados são vistos como cargas mecânicas modeladas por meio de momentos de inércia e atritos. A figura 3.31 ilustra esse tipo de sistema.

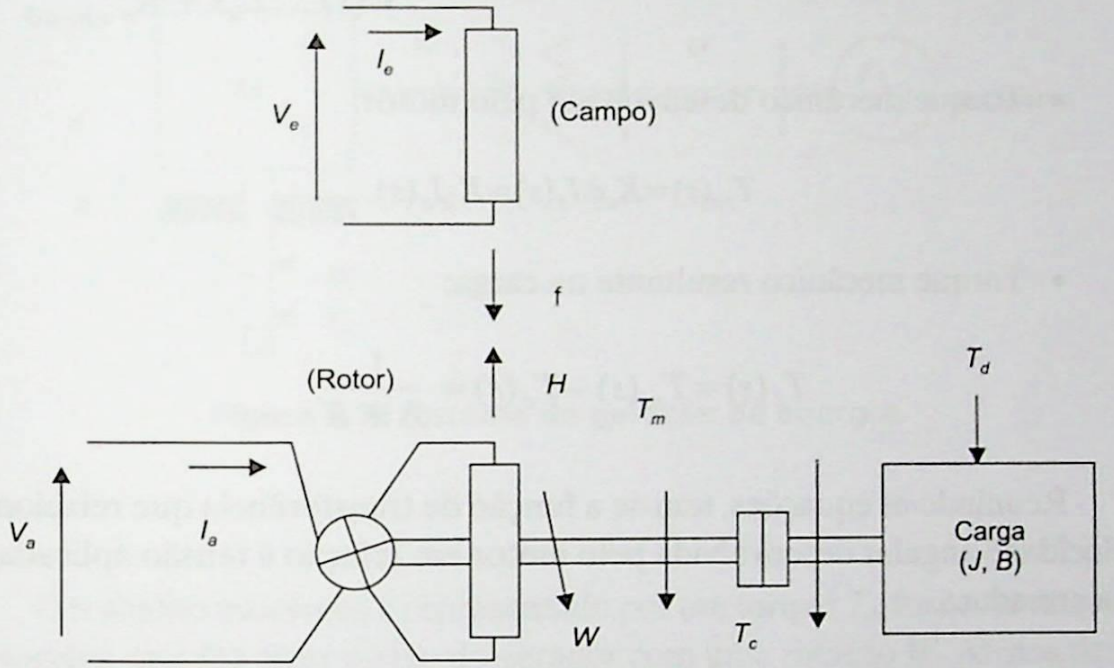


Figura 3.31 Servo-motor elétrico

Um ímã permanente ou uma bobina de campo excitada por uma corrente I_e gera um fluxo magnético ϕ. Motores com ímãs permanentes ou com valores fixos de correntes de excitação mantêm esse fluxo constante, uma condição operativa muito usada na prática. Uma outra bobina chamada de armadura alimentada por uma fonte de tensão V_a, produz uma corrente I_a que gera um fluxo magnético H. Os dois fluxos gerados, estando em oposição ou atração, produzem em um torque mecânico T_m que provoca um deslocamento angular na bobina de armadura (rotor). Coletores e escovas definem a polaridade do fluxo magnético H proporcional à corrente I_a, que por sua vez é função da resistência R_a e indutância L_a que constituem a bobina de armadura. O deslocamento da mesma promove uma velocidade angular W no eixo do motor, cujo movimento é transferido através de acoplamentos (engrenagens, polias, etc.) para as cargas mecânicas acionadas. Estas podem ser representadas por momentos de inércia J e atritos B ou através de um torque T_c associado. Torques devido a distúrbios ou atritos adicionais são modelados por um valor T_d. Como a bobina do rotor está girando na área de fluxo do campo, é induzida uma

tensão dada por $E(s) = K_n\phi W(s) = K_1 W(s)$. Usando as equações de sistemas elétricos e mecânicos, é possível escrever as funções a seguir.

- Circuito da armadura (ou rotor):

$$V(s) = V_a(s) - E(s) = V_a(s) - K_1 W(s); \frac{I_a(s)}{V(s)} = \frac{1}{L_a s + R_a}.$$

- Torque mecânico desenvolvido pelo motor:

$$T_m(s) = K_a \phi I_a(s) = K_2 I_a(s).$$

- Torque mecânico resultante na carga:

$$T_c(s) = T_m(s) - T_d(s) = \frac{1}{Js + B}.$$

Reunindo as equações, tem-se a função de transferência que relaciona a velocidade angular desenvolvida pelo motor em relação à tensão aplicada na sua armadura.

$$\frac{W(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1 K_2}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B)s + R_a B + K_1 K_2} \tag{3.24}$$

Outra função de transferência possível para esse sistema é aquela que relaciona o deslocamento angular θ do eixo do sistema pela tensão aplicada. Usando a relação entre a velocidade e o deslocamento angular $W(s) = sK_3\theta(s)$, obtém-se (3.25).

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1 K_2 / K_3}{s(L_a J s^2 + (R_a J + L_a B)s + R_a B + K_1 K_2)} \tag{3.25}$$

3.5.3 SISTEMA DE GERAÇÃO ELÉTRICA

Sistemas de geração de energia elétrica geralmente empregam máquinas síncronas como geradores. O trabalho mecânico é fornecido por turbinas hidráulicas, a vapor ou a gás que movem os eixos dos geradores. Dispositivos de excitação (geradores auxiliares, retificadores controlados, etc.) fornecem correntes para as bobinas de campo dos geradores, necessárias para induzir (gerar) tensões nas bobinas de armadura das máquinas síncronas. As tensões

geradas são transmitidas ao sistema elétrico através de transformadores e linhas de transmissão. A figura 3.32 ilustra esse tipo de sistema.

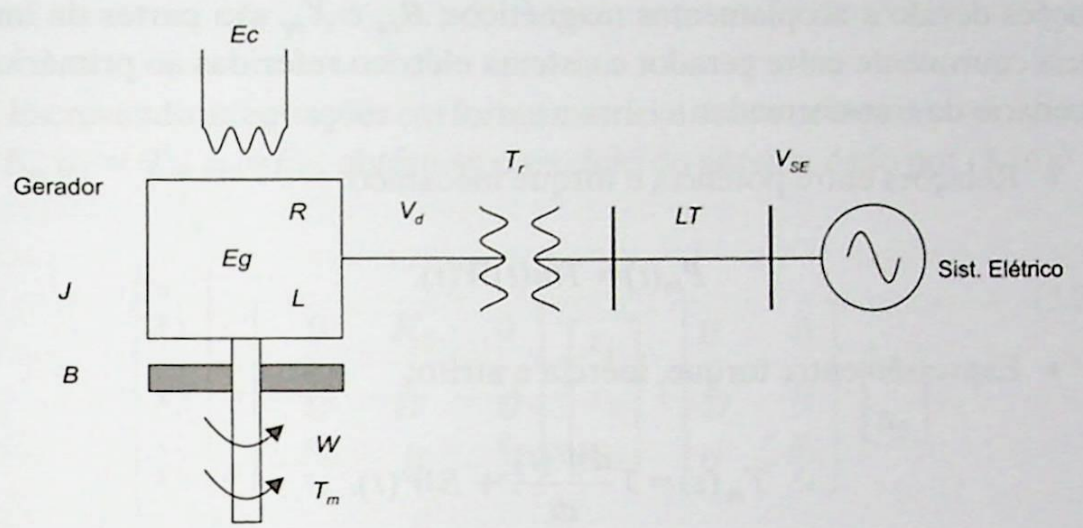


Figura 3.32 Sistema de geração de energia.

O trabalho mecânico é representado por um torque T_m fornecido através da turbina que faz girar o eixo do gerador com uma rotação W. Atritos desse eixo com os mancais de sustentação da máquina são representados por um coeficiente B. O momento de inércia da parte girante do gerador é modelado através do parâmetro J. A fonte de excitação do campo do gerador é representada pela tensão E_C. As bobinas de indução da máquina síncrona são representadas por indutâncias L, resistências R e correntes (I) associadas às mesmas. As tensões geradas internamente nessas bobinas são representas por E_g, e a voltagem disponível nos terminais do gerador é modelada através de V_d, sendo conectada ao sistema elétrico através de um transformador Tr e uma linha de transmissão LT. O sistema elétrico é representado através da tensão V_{SE}. O modelo básico que define a transferência de um nível de potência P entre um gerador interligado ao sistema elétrico representado por suas tensões e reatâncias X equivalentes, está indicado na figura 3.33. A grandeza δ representa o ângulo de carga do sistema, ou seja, $P = (EV/X)sen\delta$.

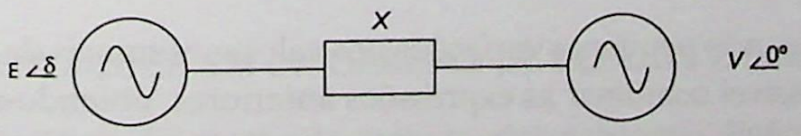


Figura 3.33 Modelo de interligação.

As equações do conjunto gerador-sistema elétrico podem ser escritas como segue abaixo com a seguinte notação: τ_d é uma constante que representa induções devido a acoplamentos magnéticos; R_{eq} e X_{eq} são partes da impedância equivalente entre gerador e sistema elétrico referidas ao primário ou secundário do transformador.

- Relações entre potência e torque mecânico:

$$P_m(t) = Tm(t)W(t).$$

- Expressão entre torque, inércia e atrito:

$$T_m(t) = J\frac{dW(t)}{dt} + BW(t).$$

- Tensão terminal do gerador:

$$V_d(t) = E_g(t) - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt}.$$

- Induções devido a acoplamentos magnéticos:

$$\tau_d \frac{dE_g(t)}{dt} + E_g(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = E_C(t).$$

- Interligação do gerador e sistema elétrico:

$$V_d(t) - [R_{eq}I(t) + L_{eq}\frac{dI(t)}{dt}] = V_{SE}(t)sen\delta.$$

- Relação entre ângulo de carga e rotação do gerador:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = K_1 W(t).$$

Considerando pequenas variações nos valores nominais de operação do sistema, é possível combinar as expressões anteriores, obtendo-se:

$$\frac{dW(t)}{dt} + \frac{B}{2J}W(t) + \frac{K_2}{2J}\delta(t) + \frac{K_2}{2J}E_g(t) = \frac{1}{2J}T_m(t);$$

$$\frac{dE_g(t)}{dt} + \frac{K_3}{\tau_d} E_g(t) + \frac{K_4}{\tau_d} \delta(t) = \frac{K_5}{\tau_d} E_C(t).$$

Escrevendo as equações em forma matricial com a notação $x_1 = \delta, x_2 = W$, $x_3 = E_g$, $u_1 = T_m$, $u_2 = E_C$, obtém-se o modelo do sistema dado por (3.26).

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{x}_1 \\ \overset{o}{x}_2 \\ \overset{o}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & 0 \\ -\frac{K_2}{2J} & -\frac{B}{2J} & -\frac{K_2}{2J} \\ -\frac{K_4}{\tau_d} & 0 & -\frac{K_3}{\tau_d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2J} & 0 \\ 0 & -\frac{K_5}{\tau_d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

3.5.4 TRANSDUTORES

Em medições ou em sistemas de controles de processos dinâmicos, são empregados dispositivos chamados transdutores que têm a finalidade de converter sinais das grandezas físicas a serem medidas/controladas (temperatura, tensão, corrente, posição, rotação, vazão, etc.) em sinais elétricos proporcionais de baixa intensidade. Uma aproximação razoável para a maioria dos transdutores são relações lineares proporcionais, ou seja, para uma grandeza física y o valor v do sinal equivalente é representado por $v(t) = K.y(t)$, onde K é uma constante de proporcionalidade. Em modelos mais elaborados de transdutores (quando se exige maiores precisões), podem ser usados os procedimentos vistos neste capítulo para se incorporar nos modelos eventuais características dinâmicas que os próprios transdutores podem apresentar.

Através das informações e dos exemplos básicos mostrados neste capítulo, espera-se que o leitor possa entender diversos modelos encontrados em livros textos e artigos em geral. E que possibilite também modelar outros sistemas dinâmicos que venha encontrar em seus próprios trabalhos acadêmicos ou profissionais.

3.6 REPRESENTAÇÕES EM DIAGRAMAS DE BLOCOS E SIMULAÇÕES

Nas seções anteriores, foi mostrado como modelar sistemas dinâmicos através de equações diferenciais, funções de transferência ou em variáveis de estado. Em análises e simulações de sistemas dinâmicos, é comum representar os

modelos dos mesmos na forma de diagramas de blocos. Os diagramas podem ser expressos por meio de funções de transferência genéricas ou por blocos básicos com elementos de soma, subtração, multiplicação, integração, etc. Blocos em cascata equivalem a funções que são o produto de funções individuais. Diagramas com retroação de informações ou com outros arranjos podem ser associados adequadamente conforme indicado na figura 3.34. As equivalências ilustradas na figura podem ser usadas para simplificar diagramas representativos de sistemas (ou funções) mais complexos.

A modelagem e representação de sistemas dinâmicos na forma de diagramas de blocos também são bastante utilizadas em análises e projetos de malhas de controle. Este texto não abordara particularmente questões sobre sistemas de controle, mas os tópicos aqui apresentados sobre modelagem de processos dinâmicos servem como base para o adequado entendimento de textos ou livros específicos desta área.

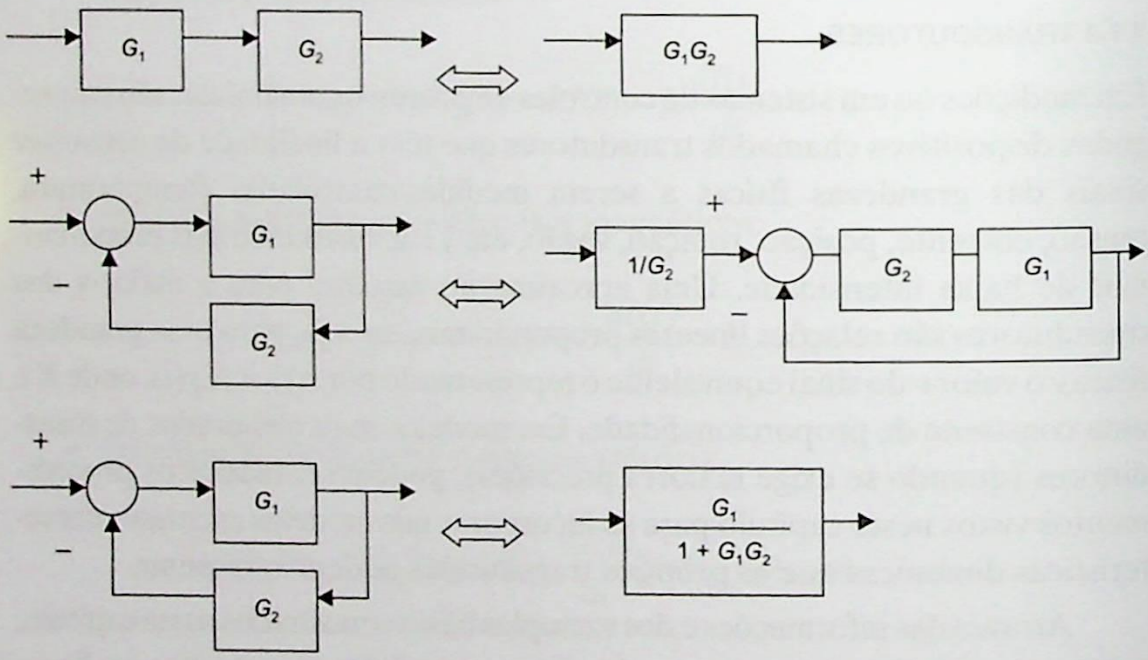


Figura 3.34 Equivalências entre diagramas de blocos.

A partir de uma equação diferencial que modela um sistema dinâmico, é possível construir diagramas de blocos que orientem implementações computacionais, objetivando solucionar numericamente o problema. Um procedimento simples consiste em explicitar o termo da maior derivada da equação e obter a variável dependente desejada a partir de etapas de integração. Ações de variáveis de entrada e das suas eventuais derivadas podem ser associadas através de blocos de soma, multiplicação, etc. A solução numérica do modelo de um sistema dinâmico e sua

apresentação na forma de tabela de dados ou gráficos é chamada de simulação. Alguns exemplos ilustrarão a construção de diagramas de blocos a partir de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos, visando a simulações numéricas. As implementações computacionais decorrentes podem ser realizadas com linguagens de programação diversas, ou por meio de *softwares* específicos. Existem programas comerciais desenvolvidos especificamente para simulações de sistemas dinâmicos genéricos. Estes pacotes de simulação possibilitam a montagem de blocos de funções de transferência de maneira direta, possuem funções matemáticas gerais e específicas que permitem a simulação da grande maioria dos modelos de sistemas dinâmicos encontrados na prática.

EXEMPLO 3.21

Diagrama de Blocos – Equações Diferenciais. Este exemplo ilustra a representação de uma equação diferencial (3.27) na forma de diagramas de blocos.

$$y''+a_1 y'+a_2 y = b_1 u \tag{3.27}$$

Explicitando a maior derivada, tem-se $y''=-a_1 y'-a_2 y + b_1 u$, que resulta no diagrama:

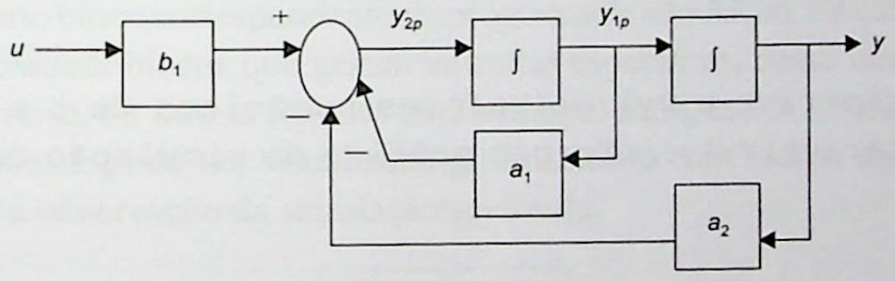


Figura 3.35 Diagrama de blocos referente à (3.27):
y_{2p} = 2ª derivada; y_{1p} = 1ª derivada.

As informações do diagrama de blocos da figura 3.35 facilitam a montagem de um programa de simulação numérica a ser exemplificado a seguir. O conceito é o mesmo utilizado em cálculo numérico, a aproximação utilizada para as integrais será a retangular ou de Euler. Neste exemplo será assumido que a entrada de excitação do sistema é unitária, e que o mesmo possui os seguintes parâmetros: $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $b_1 = 2$. O intervalo de tempo da simulação vai de zero até dez segundos. O passo de integração será de 0,01 segundos. O pseudocódigo apresen-

tado a seguir ilustra a resolução numérica da equação do modelo, e a figura 3.36 mostra o resultado da simulação correspondente.

LISTAGEM 3.1

Pseudocódigo para Simulação da equação (3.27)

```
//Valores de parâmetros e variáveis:
a1 = 3; a2 = 2; b1=2; dt = 0.01; tf = 10; vy(1 000); vt(1 000);
y = 0; y1p =0; t = 0; n =0;
Faça //Loop de repetição:
     u = 1; //Entrada de excitação do sistema: degrau unitário.
     y2p = - a1*y1p - a2*y + b1*u; //Valor da derivada de maior ordem.
     y1p = y1p + y2p*dt; //Integração da variável y2p.
     y = y + y1p*dt; //Computação da variável dependente.

     t = t + dt; //Incremento da variável independente.
     n = n + 1; //Incremento da variável de indexação.
     vy(n) = y; //Armazena valor da variável y em um vetor.
     vt(n) = t; //Armazena valor da variável t em um vetor.
Enquanto (t < tf);

    Imprimir(vt e vy); //Valores numéricos de t e y(t);
    Plotar(vt,vy); //Traçar gráfico da simulação de y(t).
```

```
//Final do código.
```

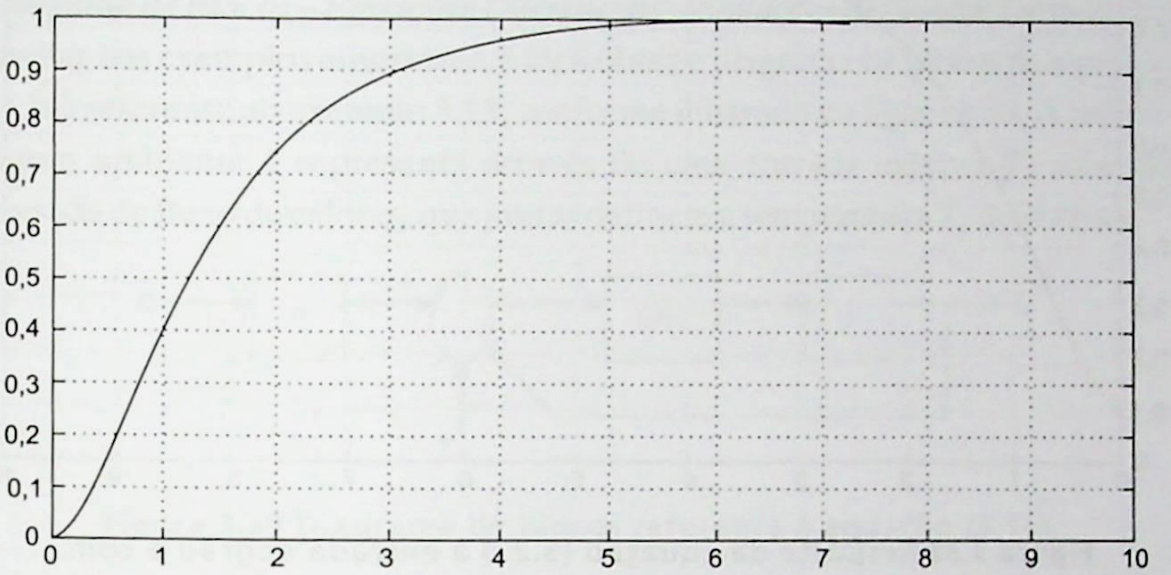


Figura 3.36 Resposta da equação (3.27) à entrada degrau unitário.

Alguns *softwares* de simulação podem processar diretamente blocos com funções de transferência relativas ao modelo utilizado. Em relação à equação (3.27), a função de transferência equivalente está indicada na figura 3.37, que seria o próprio bloco correspondente do programa de simulação. Esses *softwares* também possuem blocos que geram entradas específicas, como uma função degrau unitário, ou outras funções como rampa, seno, etc. A informação de saída resultante pode ser visualizada graficamente com blocos específicos, facilitando a observação da simulação realizada.

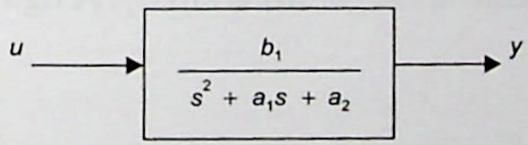


Figura 3.37 Diagrama de blocos da função de transferência referente à equação (3.27).

Geralmente, as funções de transferência de modelos de sistemas dinâmicos são obtidas considerando condições iniciais nulas nas suas variáveis ou grandezas físicas. Em algumas situações, é necessário obter simulações das respostas temporais de sistemas sujeitos a condições iniciais não-nulas. Com a finalidade de mostrar os procedimentos básicos para este tipo de problema será mostrado um exemplo ilustrativo.

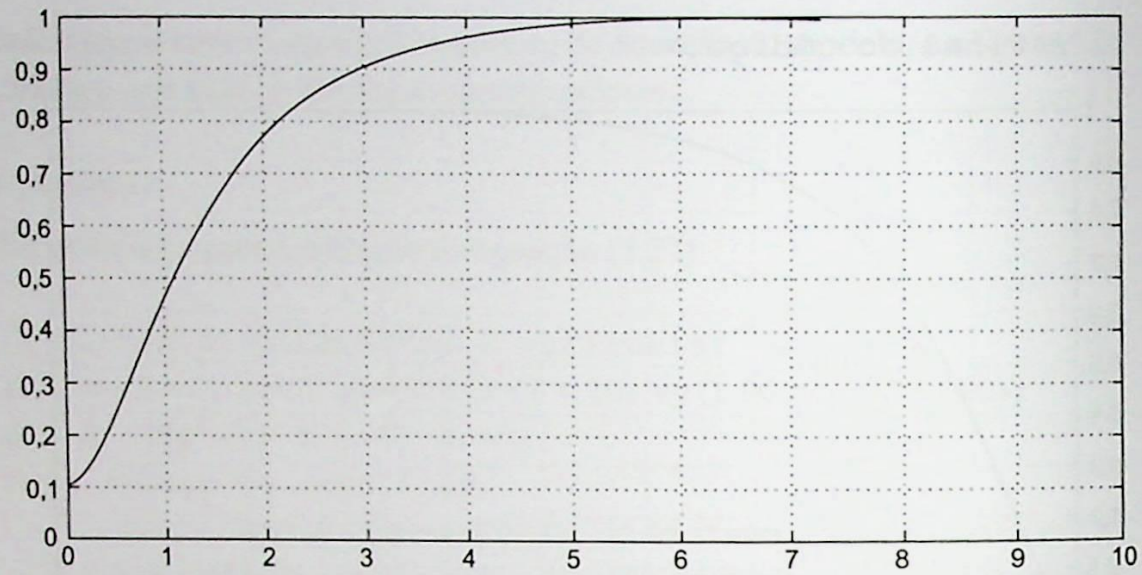


Figura 3.38 Resposta da equação (3.27) à entrada degrau e com condições iniciais não-nulas.

EXEMPLO 3.22

Resposta de um modelo com condições iniciais não-nulas. Seja o exemplo anterior com as condições iniciais $y(0) = 0{,}1$ e $dy(0)/dt = 0{,}05$. A resolução deste tipo de problema pode ser efetuada por métodos analíticos, numéricos e por *softwares* de simulação. A inclusão destes valores em programas computacionais é simples. Em relação ao código da Listagem 3.1, basta incluir os valores das condições iniciais nas variáveis correspondentes do programa ($y = 0{,}1$; $y1p = 0{,}05$). Em pacotes de simulação, uma opção seria implementar um diagrama em blocos semelhante ao da figura 3.35, e incluir os valores das condições iniciais nos blocos de integração relativos às variáveis $y1p$ e y. A figura 3.38 ilustra a simulação resultante.

EXEMPLO 3.23

Diagrama de Blocos – Equações Diferenciais – Equações de Estado. De maneira similar aos exemplos anteriores, é fácil obter o diagrama de blocos da equação (3.16) referente ao exemplo 3.15, conforme ilustrado na figura 3.39. A temperatura ambiente é representa através de uma entrada externa T_i, além da entrada de fluxo de calor q_i, que juntas definem a temperatura T_o do sistema.

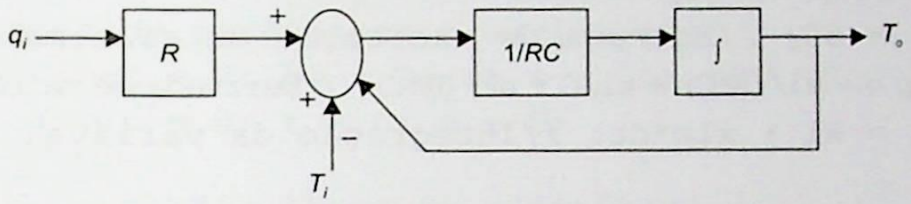


Figura 3.39 Diagrama de blocos referente à equação (3.16).

Representações em variáveis de estado também são facilmente processadas por programas numéricos de maneira semelhante ao exemplo anterior. Cada equação de estado é calculada a cada incremento de tempo, e por meio de integrações numéricas são obtidas as variáveis de estado correspondentes. Como ilustração, seja a equação (3.17) referente ao exemplo 3.15. O pseudo-código apresentado a seguir ilustra a resolução numérica da equação de estado do modelo.

LISTAGEM 3.2

Pseudocódigo para Simulação da equação (3.17)

```
//Valores de parâmetros e variáveis:
R = 5; C = 20; u2 = 25; dt = 0.1; tf = 1000; vy(1 0000); vt(10000);
x1=0; t=0; n=0;
Faça //Loop de repetição:
     u1 = 50; //Entrada de excitação do sistema.
     x1p = - x1/(R*C) + u1/C + u2/(R*C); //Derivada de maior ordem.
     x1 = x1 + x1p*dt; //Integração da variável x1p.

     t = t + dt; //Incremento da variável independente.
     n = n + 1; //Incremento da variável de indexação.
     vy (n) = x1; //Armazena valor da variável x1 em um vetor.
     vt (n) = t; //Armazena valor da variável t em um vetor.
Enquanto (t < tf);

Imprimir (vt e vy); //Valores numéricos de t e x1(t);
Plotar (vt,vy); //Traçar gráfico da simulação de y = x1(t).
//Final do código.
```

Alguns *softwares* de simulação podem processar diretamente blocos com representações em variáveis de estado relativas ao modelo utilizado. A figura 3.40 ilustra um bloco típico. Em relação à equação (3.17) do exemplo 3.15, os valores das matrizes (neste caso escalares) da representação seriam os seguintes: $A = -1/RC; B = [1/C\ 0; 0\ 1/RC]; C = 1; D = 0$. Outros blocos funcionais podem gerar entradas específicas e possibilitar a visualização na forma gráfica das variáveis de interesse da simulação realizada.

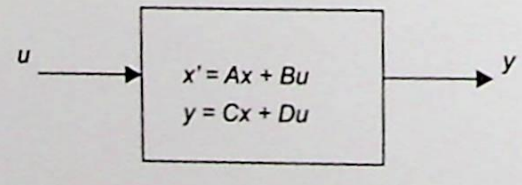


Figura 3.40 Diagrama de blocos de equações de estado.

3.6.1 EXEMPLOS DE SIMULAÇÕES

Para exemplificar a realização de simulações computacionais, será utilizada a *listagem 3.1* como ilustração. A listagem a seguir mostra a implementação computacional do exemplo citado no ambiente Matlab.

```
%Implementação da listagem 3.1 no Matlab

%Valores de parâmetros e variáveis:
a1 = 3; a2 = 2; b1 = 2; dt = 0.01; tf = 10;
y = 0; y1p = 0; t = 0; n = 0;

while (t < tf), %Loop de repetição:
     u = 1;%Entrada do sistema: degrau unitário.
     y2p = - a1*y1p - a2*y + b1*u;%Valor da 2a derivada.
     y1p = y1p + y2p*dt;%Integração da variável y2p.
     y = y + y1p*dt;%Computação da variável dependente.
     t = t + dt; %Incremento da variável independente.
     n = n + 1; %Incremento da variável de indexação.
     vy (n)= y; %Armazena valor da variável y em um vetor.
     vt (n)= t; %Armazena valor da variável t em um vetor.
end

plot (vt,vy); grid;%Gráfico da simulação de y(t).
xlabel('t [s]'); ylabel('y(t').
```

Outra maneira de realizar esta simulação no Matlab é utilizando a representação do modelo a ser simulado em função de transferência e um comando específico. A função de transferência do exemplo está indicada na figura 3.37 com os seguintes valores de parâmetros: $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $b_1 = 2$. A simulação pode ser efetuada com os seguintes comandos listados abaixo.

```
Numerador = [0 0 2]; Denominador = [1 3 2]; <Enter>
step(Numerador, Denominador) <Enter>
```

A listagem a seguir mostra a implementação computacional do exemplo citado no ambiente Scilab.

```
//Implementação da listagem 3.1 no Scilab.

clear;
//Valores de parâmetros e variáveis.
```

```
a1 = 3; a2=2; b1 = 2; dt=  0.01; tf = 10;
y = 0; y1p = 0; t = 0; n=  0;

while (t < tf), //Loop de repetição.
     u =1; //Entrada de excitação do sistema: degrau unitário.
     y2p = - a1*y1p - a2*y + b1*u; //Valor da derivada de maior ordem.
     y1p = y1p + y2p*dt;//Integração da variável y2p.
     y = y + y1p*dt; //Computação da variável dependente.
     t = t + dt; //Incremento da variável independente.
     n = n + 1; //Incremento da variável de indexação.
     vy(n)= y; //Armazena valor da variável y em um vetor.
     vt(n)= t; //Armazena valor da variável t em um vetor.
end

plot(vt,vy); //Traçar gráfico da simulação de y(t).
```

Também é possível realizar a simulação no Scilab utilizando a representação do modelo a ser simulado em função de transferência e comandos específicos. A simulação pode ser efetuada com os seguintes comandos listados abaixo.

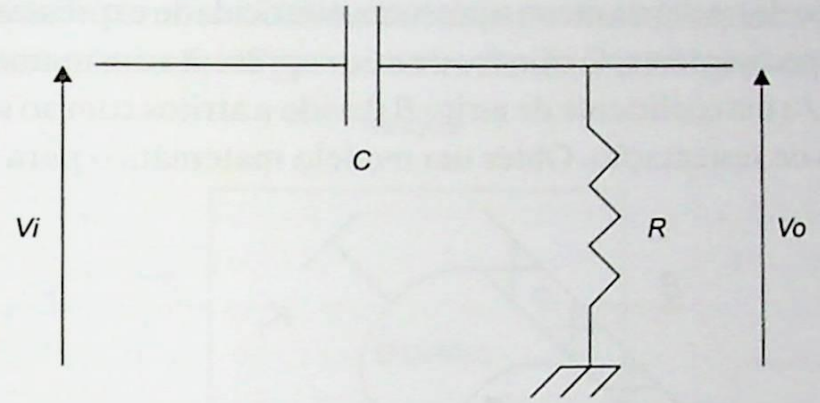
```
S = poly(0,'s'); <Enter>
gs = syslin('c',(2)/(s^2+3.0*s+2.0)); <Enter>
t =0:0.1:10; <Enter>
[y] = csim('step',t,gs); <Enter>
plot(t,'y') <Enter>
```

Outra forma possível de realizar simulações no Matlab e Scilab consiste em utilizar representações em diagramas de blocos de modo similar às figuras 3.35, 3.37, 3.39 e 3.40. No ambiente Matlab, este utilitário é conhecido como *Simulink* e no Scilab como *Scicos*. Estas ferramentas são fáceis de utilizar e apresentam interfaces com o usuário bastante amigáveis. Assim, esses aplicativos não serão exemplificados neste texto, e os interessados podem acessar a documentação dos fabricantes para obtenção de mais detalhes.

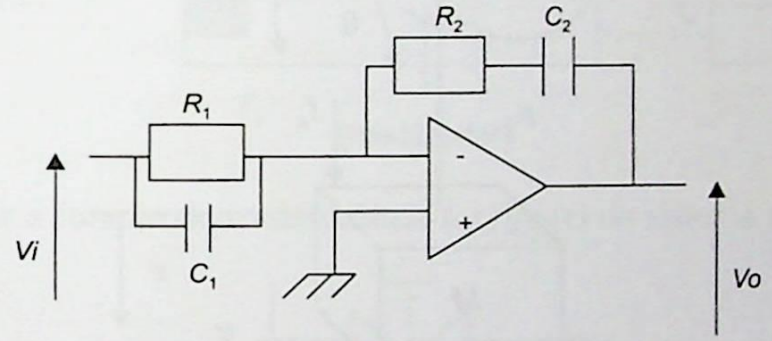
3.7 EXERCÍCIOS

Visando à aplicação dos conceitos mostrados neste capítulo, seguem alguns exercícios propostos para que o leitor possa testar seus conhecimentos.

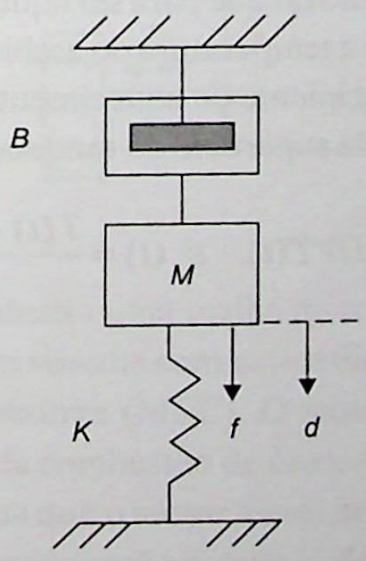
1. O circuito abaixo é usado como filtro passa-altas em circuitos eletrônicos, instrumentações e como parte de alguns compensadores analógicos. Obter a função de transferência $Vo(s)/Vi(s)$ deste sistema.



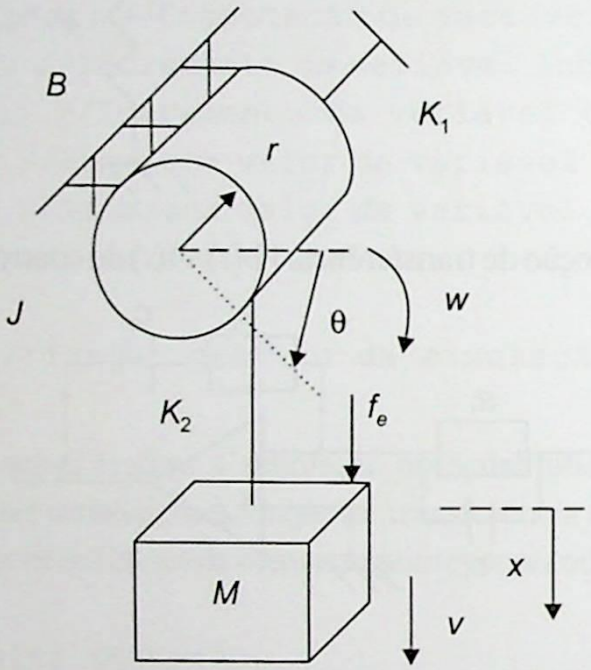
2. Obter a função de transferência $Vo(s)/Vi(s)$ do controlador PID abaixo.



3. O sistema a seguir é usado como padrão em comparações de sistemas de amortecimento em dispositivos automotivos, e este modelo é conhecido como *skyhook*. Obter a função de transferência $d(s)/f(s)$ do mesmo, onde f é uma força aplicada na massa M e d é o deslocamento resultante.



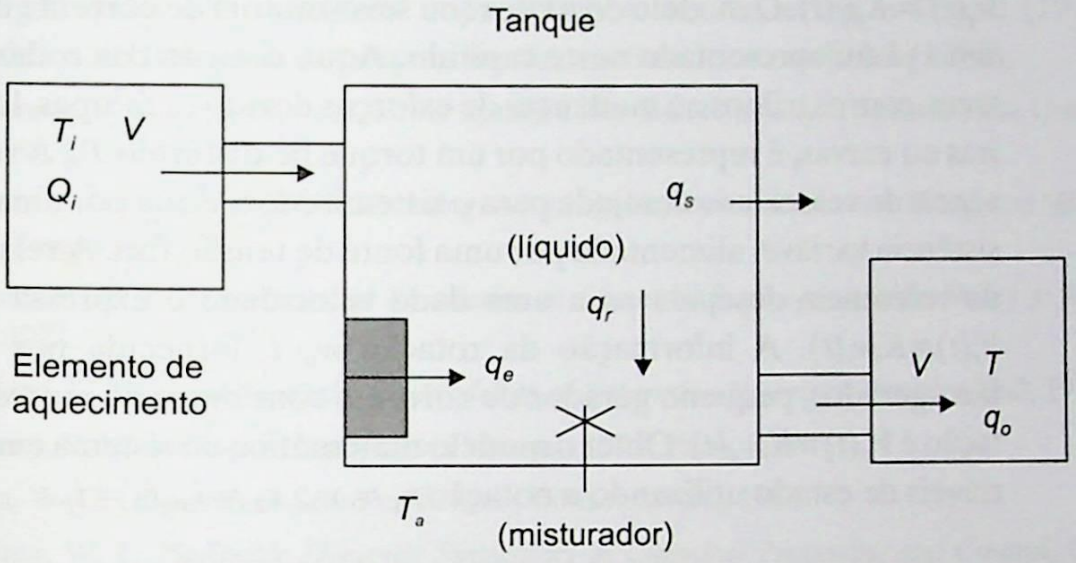
4. A figura seguinte representa parte de uma ponte rolante. A força f_e é devida a fatores externos como ventos, chuva e outros que tendem a alterar a velocidade v da massa M transportada. O eixo do cilindro e o cabo de tração do mesmo possuem elasticidade expressas por K_1 e K_2, respectivamente. O cilindro de raio r apresenta um momento de inércia J e um coeficiente de atrito B devido a atritos com ao seu mecanismo de sustentação. Obter um modelo matemático para o sistema.



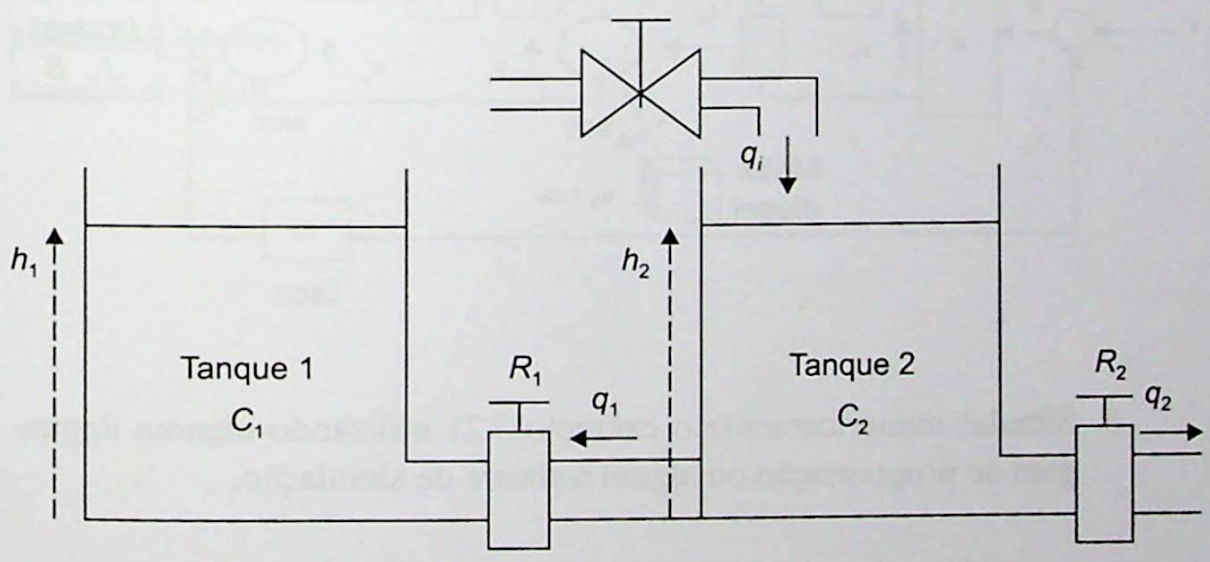
5. A figura seguinte ilustra um sistema de aquecimento de líquidos, onde q_e é o fluxo de calor fornecido ao processo para alterar a temperatura T do fluido que passa pelo recipiente de aquecimento, e q_o é o seu respectivo fluxo de calor de saída. T_i é a temperatura inicial do material entrando no tanque para ser aquecido, e q_i é o seu respectivo fluxo de calor. T_a é a temperatura do ambiente externo, q_r é o fluxo de calor dentro do recipiente de aquecimento, q_s é o fluxo de calor que escapa (perda) pela superfície do tanque. É conhecido que

$$q_i(t) = HVT_i(t),\ q_o(t) = HVT(t),\quad q_s(t) = \frac{T(t) - T_a(t)}{R},\quad q_r(t) = C\frac{dT(t)}{dt}$$

V é a vazão do líquido que passa pelo tanque de aquecimento e geralmente é controlada de maneira a ser constante. H é o calor específico do líquido, R é a resistência térmica das paredes do tanque e C é a capacidade térmica do sistema. Obter um modelo para este processo considerando T_i e T_a como entradas de perturbações (distúrbios).

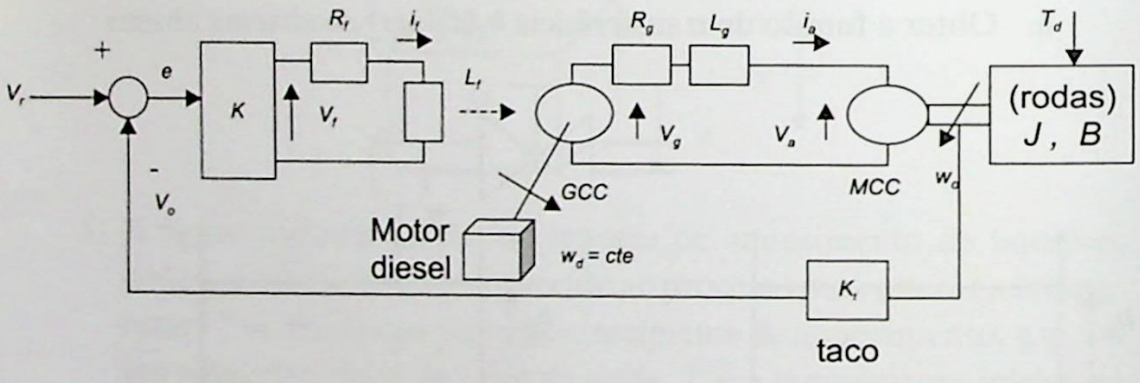


6. Obter a função de transferência $h_2(s)/q_i(s)$ do sistema abaixo.



7. A figura seguinte ilustra uma malha de controle de velocidade para trens que utiliza um sistema com motor diesel, gerador (GCC) e motor de corrente contínua (MCC). O motor diesel fornece trabalho mecânico através da combustão de óleo. A injeção do combustível é controlada de forma que o motor diesel imprima rotação w_d constante para o gerador, cuja tensão gerada V_g depende apenas da corrente

i_f da fonte de excitação. A fonte V_f dessa corrente é fornecida por um amplificador magnético ou eletrônico de ganho K que amplifica o erro e da malha. A tensão gerada alimenta então o motor elétrico que aciona por meio de sua rotação w_o as rodas da locomotiva.
É conhecido que $e(t) = V_r(t) - V_o(t) = K_r w_r(t) - K_t w_o(t)$, $V_f(t) = Ke(t)$, $V_g(t) = K_g i_f(t)$. O modelo do motor (ou sevo-motor) de corrente contínua já foi apresentado neste capítulo. Aqui, o atrito das rodas do trem, com os trilhos ou mudanças de esforços devidos a rampas, ladeiras ou curvas, é representado por um torque de distúrbio T_d. A referência de velocidade desejada para o sistema é fornecida por uma resistência variável alimentada por uma fonte de tensão fixa. A relação da referência desejada para uma dada velocidade é expressa por $V_r(t)=K_r w_r(t)$. A informação da rotação w_o é fornecida por um taco-gerador, pequeno gerador de corrente contínua cuja representação é $V_o(t)=K_t w_o(t)$. Obter o modelo matemático do sistema em variáveis de estado utilizando a notação $x_1 = w_o, x_2 = i_a, x_3 = i_f$.



8. Simular numericamente o exemplo 3.21 utilizando alguma linguagem de programação ou algum *software* de simulação.

3.8 REFERÊNCIAS

Modelos de sistemas dinâmicos em geral são mostrados de uma maneira bem didática em Close e Frederick (1978) e Ogata (2003). A modelagem de sistemas químicos é analisada em textos como Franks (1972), Holland (1975), Luyben (2002) e Khoury (2005). A modelagem de sistemas de geração de energia elétrica é mostrada com detalhes em Anderson e Fouad (1977). Modelos de transdutores especiais são encontrados em Lima (1984).

Anderson, P. M.; Fouad, A. A. *Power System Control and Stability*, The Iowa State University Press, 1997.

Close, C. M.; Frederick, D. K. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, Houghton Mifflin Company, 1978.

Franks, R. G. E. *Modeling and Simulation in Chemical Engineering*, John Wiley & Sons, 1972.

Holland, C. D. *Fundamentals and Modeling of Separation Processes*, Prentice Hall, 1975.

Khoury, F. M. *Multistage Separation Processes*, CRC Press, 2005.

Lima, W. C. *Dispositivos Sensores de Erro*, Editora UFSC, 1984.

Luyben, W. L. *Plantwide Dynamic Simulators in Chemical Processing and Control*, CRC Press, 2002.

Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, 4ª ed., 2003.

Manuais do Matlab.

Manuais do Scilab.

Capítulo 4

Técnicas de Análise

4.1 INTRODUÇÃO

Os capítulos anteriores apresentaram, além de uma breve revisão teórica, os elementos fundamentais para análise de sistemas dinâmicos, incluindo a modelagem matemática de sistemas físicos. A partir deste ponto, será abordada a análise de sistemas em geral. Assim, um primeiro ponto importante refere-se à função de transferência. A mesma relaciona uma saída de interesse com uma entrada correspondente, de forma que é possível estabelecer uma relação entre elas. A essa relação chamamos de função de transferência, cuja forma geral é dada abaixo.

$$F(S) = \frac{P(S)}{Q(S)} = \frac{b_w S^w + b_{w-1} S^{w-1} + \ldots + b_1 + S b_o}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_o} \tag{4.1}$$

A equação (4.1) contém propriedades importantes na análise de um sistema a ela associado. Uma função de transferência pode ser classificada como:

- Estritamente própria, se $w < n$.
- Própria, se $w = n$.
- Imprópria, se $w > n$.

A classificação acima é de grande valia na pré-análise de um sistema. Chamamos de zeros de $F(S)$, as raízes do numerador de $F(S)$, de forma que os zeros são obtidos quando $P(S) = 0$. Os pólos de $F(S)$ são as raízes do denominador de $F(S)$, que são obtidos quando $Q(S) = 0$.

4.2 FORMA FATORADA

Se os zeros e pólos de uma função de transferência forem todos conhecidos, a seguinte representação simplificada pode ser obtida

$$F(S) = \frac{b_w(S - Z_1)\ldots(S - Z_w)}{a_n(S - S_1)\ldots(S - S_n)},$$

onde S_1, S_2, ... S_n são os pólos da função da transferência, e Z_1, Z_2, ... Z_w são os zeros dessa mesma função.

4.3 REPRESENTAÇÃO NO PLANO S

A variável S é genericamente definida como complexa, o que implica que a mesma pode ser representada em um plano complexo, como mostrado a seguir. Seja a função $F(S)$ abaixo que já está na forma fatorada, já que todos os zeros e pólos são conhecidos. Além de zeros e pólos reais, a função contém um par de pólos complexo conjugados. A representação no plano S está indicada na figura 4.1

$$F(S) = \frac{15(S + 3)(S + 4)}{S(S + 6)(S + 2 + j5)(S + 2 - j5)}$$

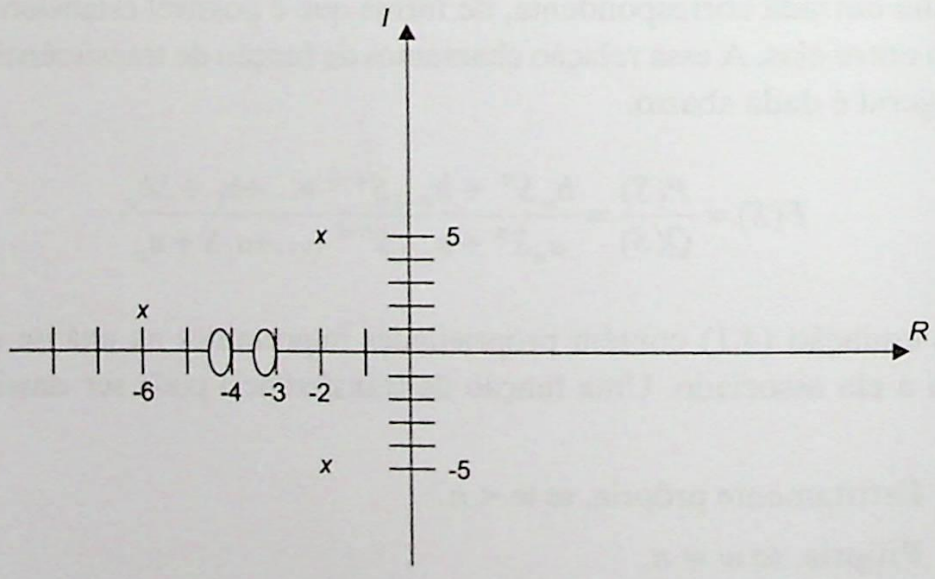


Figura 4.1 Representação de zeros e pólos no plano *S*.

4.4 DESMEMBRAMENTO DE UMA FUNÇÃO IMPRÓPRIA

Pode-se estabelecer, desde já, que estaremos particularmente interessados em analisar sistemas associados a funções de transferência estritamente próprias ou próprias. A razão desta afirmativa é dada no exemplo a seguir, quando a função de transferência imprópria é apresentada por

$$F(S) = \frac{6S^3 + S^2 + 2S + 1}{3S^2 + 2S + 1},$$

que pode ser representada como

$$F(S) = 2S - 1 + \frac{2S + 2}{3S^2 + 2S + 1},$$

cuja transformada inversa é dada por

$$f(t) = 2\frac{du_0}{dt}(t) - u_o(t) + L^{-1}\left(\frac{2S + 2}{3S^2 + 2S + 1}\right).$$

Logo, a transformada inversa de uma função racional imprópria contém um ou mais elementos impulsivos na resposta. De forma a entender o papel que um elemento derivativo tende a desempenhar em uma função de transferência, assuma que se tenha a representação abaixo.

$$x(t) \longrightarrow s \longrightarrow dx / dt$$

Sendo $x(t) = X\,sen(wt + \theta)$. Logo, $dx/dt = Xw\,cos(wt + \theta)$. Note que para altos valores de freqüência (w), a saída tende para um valor muito alto, e por esta razão, limita-se à faixa de operação de interesse.

Seja, por outro lado, a seguinte função de transferência estritamente própria:

$$F(S) = \frac{3S^2 + 2S + 1}{S^3 + S^2 + 2S + 1}.$$

Neste caso, não é possível dividir o numerador pelo denominador. Isso nos remete imediatamente ao próximo tópico, em que o desmembramento em frações parciais é discutido.

4.5 DESMEMBRAMENTO EM FRAÇÕES PARCIAIS

O desmembramento em frações parciais consiste em explicitar os pólos da função de transferência, de forma que a transformada inversa seja trivial. Assuma a seguinte função de transferência, já na forma fatorada (aquela em que os zeros e pólos aparecem de forma explícita):

$$F(S) = \frac{3(S+1)(S+2)}{(S+4)(S+3)(S+5)}.$$

A função de transferência acima é estritamente própria, já que a ordem do polinômio do denominador é maior que o do numerador. Deseja-se reescrever $F(S)$ de forma que:

$$F(S) = \frac{A_1}{(S+4)} + \frac{A_2}{(S+3)} + \frac{A_3}{(S+5)}.$$

Na forma acima, os pólos aparecem de forma explícita em cada fração parcial. Cada termo A_k do numerador é chamado de resíduo e tem também um papel importante na resposta dinâmica. Antes mesmo de apresentar os cálculos dos resíduos, chamaremos a atenção para a importância da expansão por frações parciais, dada pela facilidade de obtenção da transformada inversa. Para a expressão acima, tem-se:

$$f(t) = A_1 e^{-4t} + A_2 e^{-3t} + A_3 e^{-5t}.$$

Logo, a expansão por frações parciais facilita bastante a análise do sistema, uma vez que a resposta no domínio do tempo é direta. A partir de $f(t)$, pode-se facilmente observar que os termos A_k têm papel importante na resposta do sistema no instante $t = 0^+$.

CALCULANDO OS RESÍDUOS

Inicialmente, será apresentada a situação mais simples, em que os pólos são distintos. Para cada pólo com esta característica, tem-se:

$$A_k = (S - S_k) F(S)\Big|_{S=S_k}.$$

Para o caso em que pólos múltiplos se apresentam, duas alternativas são propostas.

a) Assumindo que $F(S)$ tenha a forma

$$F(S) = \frac{A_1}{S - S_1} + \ldots + \frac{A_{r1}}{S - S_r} + \frac{A_{r2}}{(S - S_r)^2} + \ldots + \frac{A_{rm}}{(S - S_r)^m}.$$

Portanto, na expressão acima, o pólo S_r aparece m vezes. Para cada pólo múltiplo, tem-se:

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\left\{\frac{d^{m-k}}{dS^{m-k}}\left[\frac{P(S)}{Q(S)}(S - S_r)^m\right]\right\}_{S=S_r} \quad k = 1, \ldots, m.$$

b) Uma alternativa ao método anterior consiste em calcular o primeiro resíduo sem derivação. A fração relativa a este termo é retirada, e a expressão remanescente é novamente analisada. Um exemplo em que os dois métodos são empregados é mostrado a seguir.

Exemplo: Expandir o polinômio abaixo por frações parciais.

$$F(S) = \frac{(S+1)}{(S+2)(S+3)^2} = \frac{A_1}{(S+2)} + \frac{A_2}{(S+3)} + \frac{A_3}{(S+3)^2}$$

O cálculo dos resíduos é dado como segue:

$$A_1 = \left.\frac{(S+1)(S+2)}{(S+2)(S+3)^2}\right|_{S=-2} = -1;$$

$$A_2 = \frac{1}{1}\frac{d}{dS}\left\{\frac{(S+1)(S+3)^2}{(S+2)(S+3)^2}\right\}\Bigg|_{S=-3} = \left.\frac{(S+2)-(S+1)}{(S+2)^2}\right|_{S=-3} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$A_3 = \left.\frac{(S+1)(S+3)^3}{(S+2)(S+3)^2}\right|_{S=-3} = \frac{-2}{-1} = 2;$$

$$f(t) = -e^{-2t} + e^{-3t} + 2e^{-3t}.$$

A alternativa a este cálculo é dada a seguir. Primeiro, calculam-se os resíduos associados ao termo quadrático

$$A_1 = \left.\frac{(S+1)(S+3)^2}{(S+2)(S+3)^2}\right|_{S=-3} = 2.$$

Este termo é então extraído da expressão original:

$$F_{aux} = \frac{(S+1)}{(S+2)(S+3)^2} - \frac{2}{(S+3)^2} = \frac{-(S+3)}{(S+2)(S+3)^3};$$

$$F_{aux} = \frac{-1}{(S+2)(S+3)}.$$

A partir desta expressão, calculam-se os resíduos remanescentes:

$$A_2 = \left.\frac{-(S+2)}{(S+2)(S+3)}\right|_{S=-2} = -1;$$

$$A_2 = \left.\frac{-(S+3)}{(S+2)(S+3)}\right|_{S=-3} = 1.$$

Nota-se, como esperado, os resíduos obtidos não são alterados, independente da metodologia escolhida.

FRAÇÕES PARCIAIS COM O USO DO MATLAB

Para obter os pólos em Matlab, é necessário que a função de transferência seja fornecida na forma não fatorada. Assim, a função

$$F(S) = \frac{3(S+1)(S+2)}{(S+4)(S+3)(S+5)}$$

pode ser fornecida como

$$F(S) = \frac{3S^2 + 9S + 6}{S^3 + 12S^2 + 47S + 60}. \tag{4.1}$$

Os comandos e respostas correspondentes estão indicados abaixo.

num = [3 9 6]
den = [1 12 47 60]
[*r*,*p*] = residue (*num*,*den*) <Enter>
r =
18,0000
– 18,0000
3 0000
p =
– 5,0000
– 4,0000
– 3,0000

Em Scilab, a obtenção dos pólos e resíduos também é simples. A função $F(S)$, aqui chamada $H1$ por conveniência, deve primeiramente ser definida conforme: s = poly (0,'s');

$H1$=(3*s ^ 2+9*s+6)/(s ^ 3+12*s ^ 2+47*s+60); $S1$ = *syslin* ('c',$H1$).

Após esta definição, os pólos e resíduos são obtidos de acordo com o comando:

$$pr = pfss\ (H1)\ .$$

É importante enfatizar que, a exemplo de Matlab, a variável à esquerda da igualdade (neste caso *pr*) representa o nome da variável, de forma que sua definição fica a critério do usuário. Como resultado, o Scilab devolve:

$$pr =$$

$$pr(1)$$

$$\frac{18}{5+s}$$

$$pr(2)$$

$$\frac{-18}{4+s}$$

$$pr(3)$$

$$\frac{3}{3+s}.$$

Um aspecto relevante na análise de sistemas dinâmicos é a resposta desses sistemas a uma entrada a degrau ou impulso. No Matlab, essa análise é bastante simples. Para uma resposta ao degrau, basta executar o comando abaixo. O gráfico da figura 4.2 mostra a resposta resultante.

step*(num,den)* <Enter>

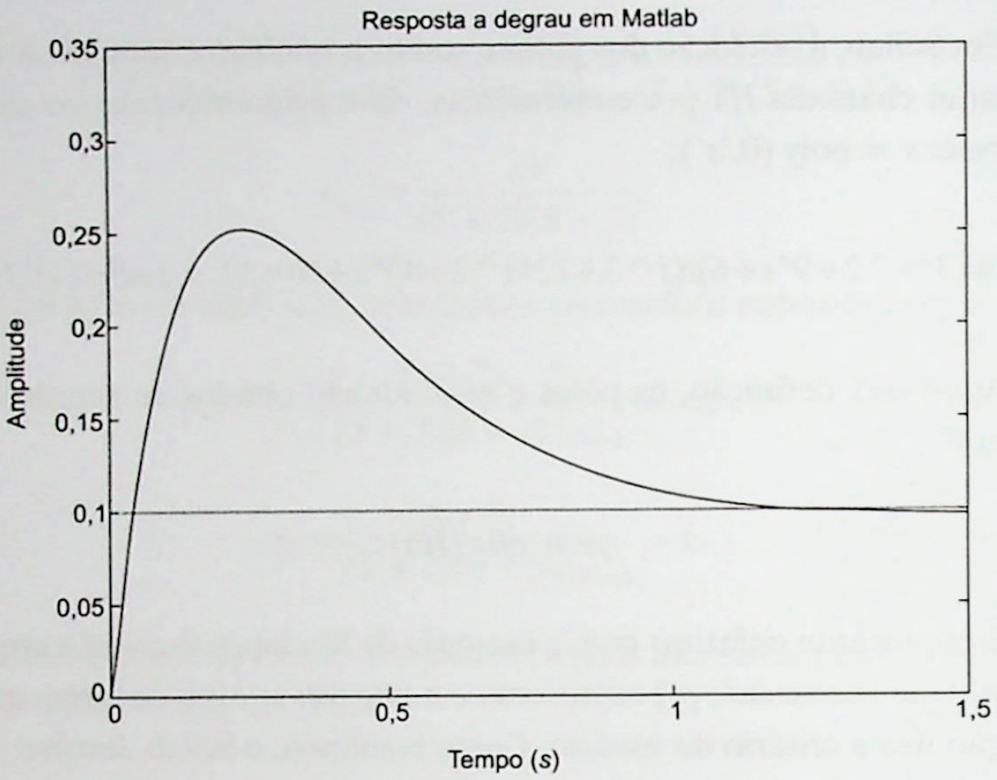


Figura 4.2 Resposta a degrau de (4.1).

A resposta a impulso é dada pelo comando *impulse(num,den)* que gera o gráfico ilustrado na figura 4.3.

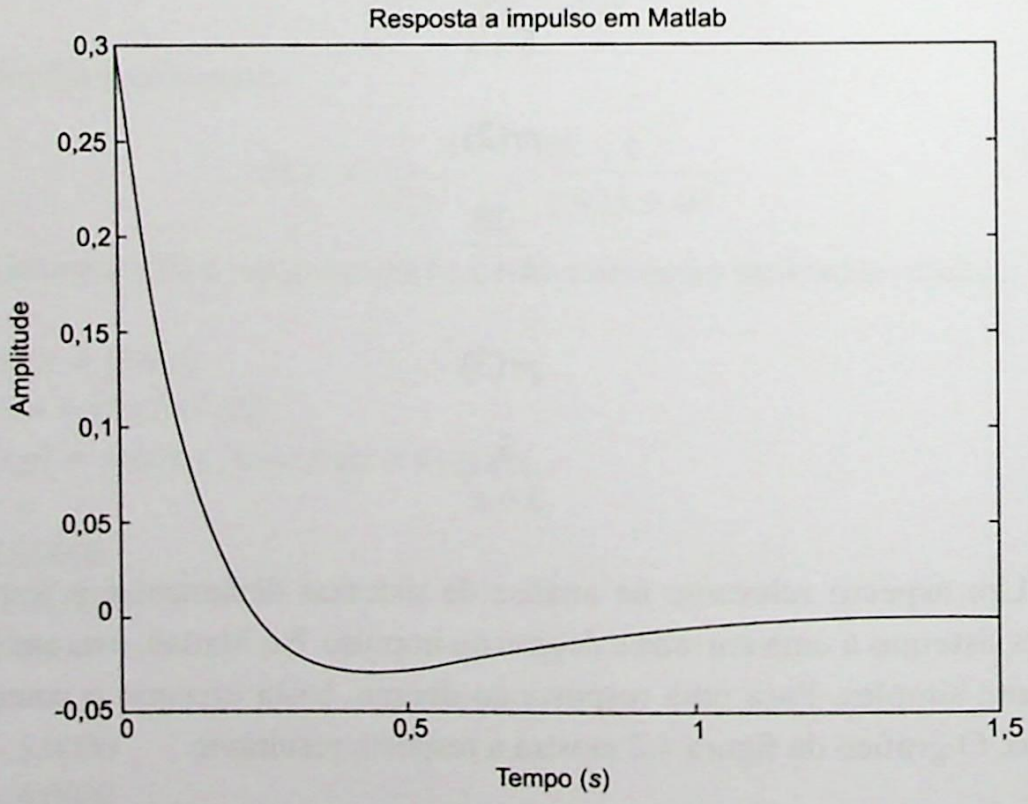


Figura 4.3 Resposta ao impulso de (4.1).

A obtenção dos gráficos em Scilab apresenta os seguintes passos, assumindo que a função já tenha sido criada, conforme mostrado anteriormente para o cálculo dos resíduos:

$$t = 0{:}0.001{:}1.5;$$

$$plot(t',(csim('step',t,S1'))).$$

A conseqüência é a figura 4.4, similar à figura 4.2 obtida com a ajuda do Matlab:

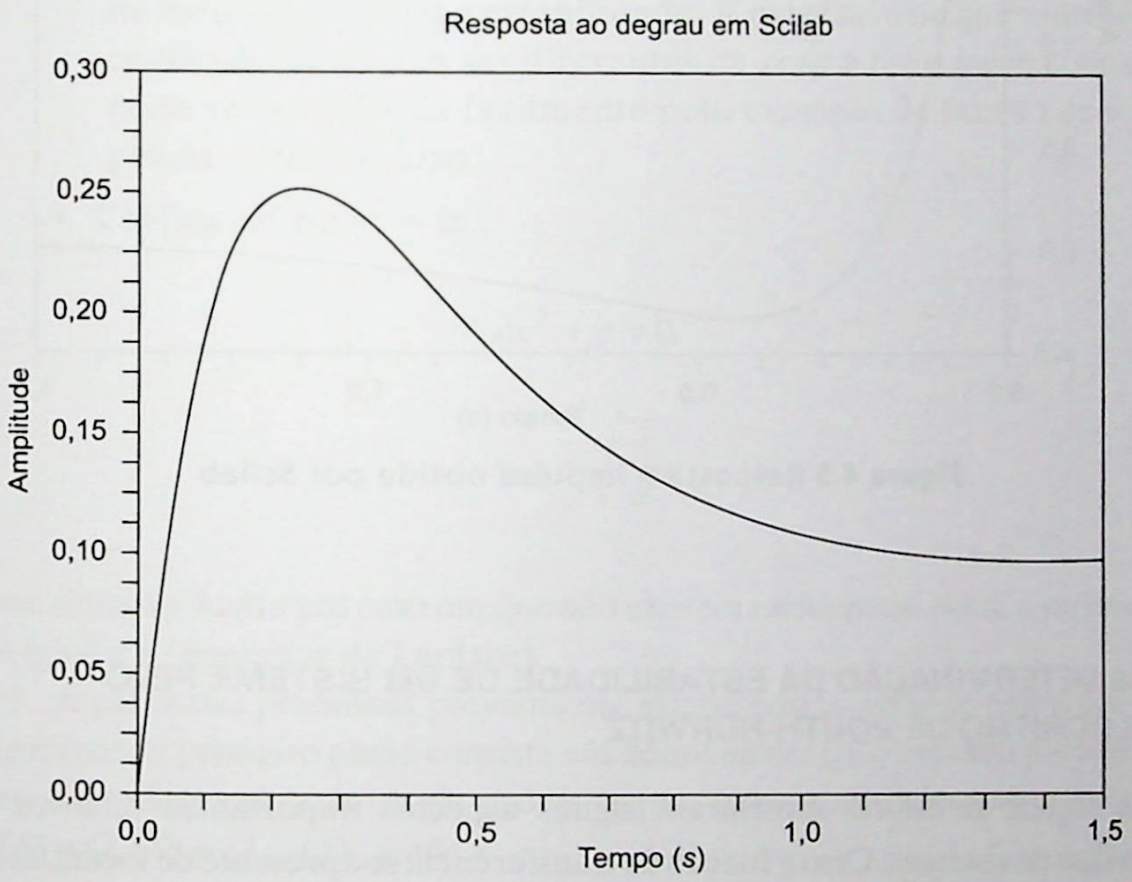


Figura 4.4 Resposta a degrau obtida com uso de Scilab.

Para a resposta a impulso, uma vez determinada a função, o comando é dado por

$$plot(t',(csim('\text{impulse}',t,S1'))).$$

A figura 4.5, semelhante à 4.3, é assim gerada.

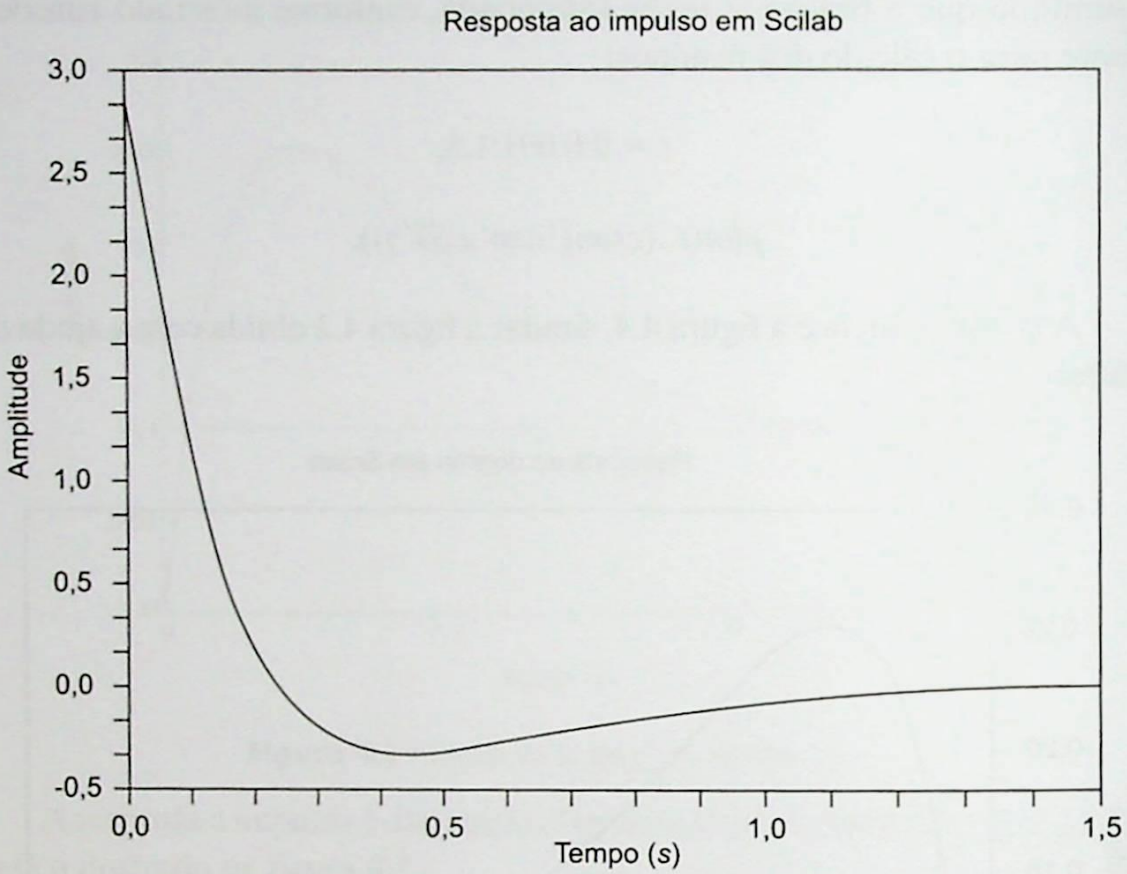


Figura 4.5 Resposta a impulso obtida por Scilab.

4.6 DETERMINAÇÃO DA ESTABILIDADE DE UM SISTEMA PELO ALGORITMO DE ROUTH-HURWITZ

As seções anteriores mostraram alguns aspectos importantes relativos à análise de sistemas. Caso a função de transferência se apresente de forma fatorada, a expansão em frações parciais tende a fornecer as respostas relevantes requeridas. No entanto, nem sempre a função de transferência aparece na forma fatorada. Neste caso, a seguinte seqüência pode ser estabelecida:

a) A função de transferência deve ser estritamente própria. Como mostrado na seção 4.4, funções de transferência impróprias geram parcelas impulsivas na resposta, comprometendo, assim, a estabilidade do sistema. Logo, o leitor deve perceber que o primeiro passo consiste em determinar corretamente a função de transferência do sistema, que, por sua vez, requer uma modelagem correta do mesmo.

b) O fato de a função de transferência ser estritamente própria não garante, *a priori*, a estabilidade do sistema. Assim, assume-se que a função de transferência seja conhecida e tenha a forma $W(s) = P(S)/Q(S)$, sendo $Q(S) = A_n S^n + A_{n-1} S^{n-1} + \ldots + A_1 S + A_0$. As raízes de $Q(S)$ são os pólos da função de transferência. Um requerimento importante para a estabilidade do sistema é que $Q(S)$ tenha todos os coeficientes diferentes de zero e com o mesmo sinal. O algoritmo de Routh-Hurwitz determina o número de pólos com parte real positiva. Deseja-se, portanto, que $Q(S)$ não contenha nenhum pólo com parte real positiva, de forma a garantir a estabilidade. A exigência de que todos os coeficientes devem ser diferentes de zero e ter o mesmo sinal pode ser entendida facilmente pelo exemplo de função de segunda ordem abaixo.

- Coeficiente em $bx = 0$:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Essa situação ilustra um caso em que não existem raízes reais. Aqui, a variável x é igual a S (operador de Laplace).

A partir das premissas previamente estabelecidas, pode-se empregar o algoritmo. O primeiro passo consiste em desmembrar $Q(S)$ em duas parcelas, uma de ordem par e outra de ordem ímpar, como mostrado a seguir com $Q(S) = Q_n(S) + Q_{n-1}(S)$, onde

$$Q_n(S) = A_n(S) + A_{n-2}(S) + \ldots$$

$$Q_{n-1}(S) = A_{n-1}(S) + A_{n-3}(S) + \ldots$$

A partir deste desmembramento, divide-se o polinômio de maior grau pelo de menor grau. Após esta divisão, uma nova divisão é realizada. Desta vez, o denominador da operação anterior passa a ser o numerador, enquanto o denominador é o resto. Essa seqüência de divisões estabelece o algoritmo representado pela tabela a seguir:

S^n	A^n	A^{n-2}	A^{n-4}	A^{n-6}	.	.
S^{n-1}	A^{n-1}	A^{n-3}	A^{n-5}	A^{n-7}	.	.
S^{n-2}	C^1	C^2	C^3	.	.	.
S^{n-3}	D^1	D^2	D^3	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
S^2	h^1	h^2				
S^1	i^1					
S^0	j^1					

onde

$$C_1 = \frac{A_{n-1}A_{n-2} - A_n A_{n-3}}{A_{n-1}}, C_2 = \frac{A_{n-1}A_{n-4} - A_n A_{n-5}}{A_{n-1}}, C_3 = \frac{A_{n-1}A_{n-6} - A_n A_{n-7}}{A_{n-1}}$$

$$D_1 = \frac{C_1 A_{n-3} - A_{n-1}C_2}{C_1}, D_2 = \frac{C_1 A_{n-5} - A_{n-1}C_3}{C_1}, D_3 = \frac{C_1 A_{n-7} - A_{n-1}C_4}{C_1}.$$

Os outros termos são obtidos de maneira similar. A condição de estabilidade do sistema é dada pela primeira coluna da tabela. Para cada troca de sinais, existe um pólo com parte real positiva. O exemplo a seguir ilustra essa situação.

$$Q(S) = S^5 + 2S^4 + 3S^3 + S^2 + 3S + 1$$

S^5	1	3	3
S^4	2	1	1
S^3	5/2		5/2
S^2	−1	1	
S^1	5		
S^0	1		

Como houve duas trocas de sinal na primeira coluna, o sistema é instável, pois existem dois pólos com parte real positiva. O sistema é instável, pois basta

um pólo com parte real positiva para levar a variável dependente de interesse do sistema a valores crescentes com o decorrer do tempo.

ENTENDENDO O ALGORITMO

Foi mostrado que um sistema de segunda ordem pode ajudar no entendimento do algoritmo de Routh. Empregou-se, num primeiro momento, o sistema de segunda ordem para entender a exigência dos coeficientes serem todos diferentes de zero. Será vista agora a exigência dos coeficientes apresentarem os mesmos sinais. Sabe-se que os somatórios das raízes de um polinômio de segunda ordem é dado por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

O produto é expresso por:

$$x_1 * x_2 = \frac{c}{a}.$$

Pela expressão acima, observa-se que c e a devem ter os mesmos sinais, caso contrário x_1 e x_2 também terão sinais diferentes. Nota-se, porém, que se $b<0$, e a e $c>0$:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}.$$

Neste caso, há suas alternativas:

- x_1 e x_2 são maiores que zero, e o sistema é instável.
- x_1 e x_2 têm sinais opostos, sendo que a raiz positiva é maior em módulo que a negativa. Neste caso, o sistema também é instável.

Pelo mostrado acima, conclui-se ser necessário, mas não suficiente, que todos os coeficientes tenham o mesmo sinal. Isso é comprovado pela exigência de inexistência de troca de sinais na primeira coluna, como mostrado a seguir:

$$Q(S) = aS^2 + bS + c$$

$$\begin{array}{ll} S^2 & a \quad c \\ S^1 & b \\ S^0 & c \end{array}$$

Donde se conclui que a, b e c devem ter os mesmos, sinais.

ESTABILIDADE RELATIVA

Pode ser relevante, durante a análise de um sistema, determinar não apenas se todos os pólos têm parte real negativa, mas também se não são menores do que um valor pré-especificado. Isso pode ser requerido de forma a avaliar a robustez da estabilidade do sistema. A partir do algoritmo de Routh-Hurwitz, isso pode ser facilmente estudado. Para tanto, faz-se uma translação na origem, conforme mostrado no exemplo a seguir assumindo:

$$Q(S) = S^3 + 6S^2 + 24S + 40.$$

Desejando-se que o menor autovalor seja menor que –1, é executada a translação no eixo, produzindo a nova função e sua correspondente tabela:

$$\hat{S}^3 + 3\hat{S}^2 + 15\hat{S} + 21 = 0$$

$\hat{S}^3$	1	15
$\hat{S}^2$	3	21
$\hat{S}^1$	8	
$\hat{S}^0$	21	

Como não houve troca de sinais na primeira coluna, pode-se concluir que os autovalores são todos menores que –1.

TEOREMAS DO ALGORITMO

Como dito anteriormente, a troca de sinais na primeira coluna da tabela é suficiente para determinar que um sistema dinâmico é instável. Algumas características importantes merecem ainda ser detalhadas:

a) Qualquer fila da tabela pode ser multiplicada ou dividida por um número real positivo, sem que isso altere a análise do sistema.

A afirmação acima é de utilidade computacional apenas, já que a multiplicação ou divisão de uma linha por um número real pode facilitar o desenvolvimento do algoritmo. Os dois próximos teoremas têm propriedades mais importantes.

b) Coeficiente nulo na primeira coluna. Se houver um elemento nulo na primeira coluna, havendo pelo menos um elemento diferente de zero

no restante da fila, a tabela pode ser recalculada através de uma das três maneiras:

- b1) Fazer no polinômio $Q(S)$ a mudança de variável $S=1/x$, e aplicar o algoritmo ao polinômio $x^n\,Q(1/x)$.

Este caso é equivalente a achar um outro polinômio, cujas raízes são dadas pelo inverso de cada raiz do polinômio original. Assim, apesar de as raízes serem diferentes, a análise qualitativa é válida, já que os sinais são mantidos. Assuma, por exemplo, o polinômio $Q(S) = -S^{-3} + 2S^2 + S - 2$ cujas raízes são dadas por $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 2$. Fazendo $S=1/x$ e aplicando $x^nQ(1/x)$, o seguinte polinômio é obtido:

$$x^nQ(1/x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1.$$

As raízes do mesmo são dadas por $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1/2$. Portanto, apesar das raízes terem módulos invertidos, os sinais se mantêm, e isso é o que importa para a análise qualitativa, visto que só verificamos se há troca de sinais na primeira coluna. Se essa alternativa não funcionar, vem:

- b2) Definir um novo polinômio $Q_a(S) = (S+a)Q(S)$, onde $a>0$. Aplicar o algoritmo a $Q_a(S)$.

Este caso é equivalente a inserir uma nova raiz negativa no polinômio, o que muda a ordem do mesmo. No entanto, devido ao fato de o pólo inserido ser "estável", $(a > 0)$, a estrutura do sistema original se mantém. Isso é mostrado no exemplo $Q(S) = S^2 + 3S + 2$, cujas raízes são dadas por $S_1 = -2$, $S_2 = -1$. Se um novo pólo for inserido, tal que

$$Q(S) = (S + 2)(S^2 + 3S + 2)$$

$$Q(S) = S^3 + 5S^2 + 8S + 4$$

as novas raízes são dadas por $S_1 = -2$, $S_2 = -1 e\, S_3 = -2$. Notar que os pólos anteriores são mantidos, e um novo pólo é agora considerado.

- b3) Substituir o valor nulo por um valor infinitesimal ε e prosseguir com o algoritmo.

Este caso é sem dúvida o mais simples de todos, já que substituir o valor zero por um valor infinitesimal ε não altera a estrutura do problema estudado. Os exemplos a seguir ilustram essas situações. Seja:

$$Q(S) = S^4 + 2S^3 + S^2 + 2S + 3$$

$$\begin{array}{lll} S^4 & 1 & 1 & 3 \\ S^3 & 2 & 2 \\ S^2 & 0 & 3 \end{array}$$

A primeira alternativa empregada é a (*b*):

$$x^n Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 + 2x^3x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{lll} x^4 & 3 & 1 & 1 \\ x^3 & 2 & 2 \\ x^2 & -2 & 1 \\ x^1 & 3 \\ x^0 & 1 \end{array}$$

Observar que esta substituição deu condições de concluir o algoritmo e deduzir que o sistema é instável, devido à troca de sinais. Assuma agora que:

$$Q(S) = S^4 + 2S^3 + S^2 + 2S + 1$$

$$\begin{array}{lll} S^4 & 1 & 1 & 1 \\ S^3 & 2 & 2 \\ S^2 & 0 & 1 \end{array}$$

Neste caso, o polinômio $x^n Q(1/x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ não difere, qualitativamente, do polinômio $Q(S)$. Assim, multiplicando $Q(S)$ por um fator $(S+a)$, sendo $a = 1$, fornece:

$$Q(S) = S^5 + 3S^4 + 3S^2 + 3S + 1$$

$$\begin{array}{lll} S^5 & 1 & 3 & 3 \\ S^4 & 3 & 3 & 1 \\ S^3 & 2 & \frac{8}{3} \\ S^2 & -1 & 1 \\ S^2 & \frac{14}{3} & 0 \\ S^0 & 1 \end{array}$$

As duas trocas de sinal indicam que o sistema é instável.

c) Fila nula: Este tipo de problema apresenta as seguintes características:

- Raízes simétricas em relação à origem.
- Se o polinômio não tiver raízes nulas, a fila que se anula será sempre de grau ímpar.
- As raízes simétricas são os zeros do polinômio formados pelos coeficientes da fila anterior que se anulou.
- Para prosseguir com o algoritmo, substitui-se a fila nula pela derivada da fila imediatamente anterior.

Exemplo:

$$Q(S) = S^4 + 2S^3 + 6S^2 + 8S + 8$$

S^4	1	6	8
S^3	2	8	
S^2	2	8	
S^1	0		

Note que a fila anterior que se anulou é dada por $2S^2+8$, cuja derivada é dada por $4S$. Assim, a nova tabela é dada por:

$$Q(S) = S^4 + 2S^3 + 6S^2 + 8S + 8$$

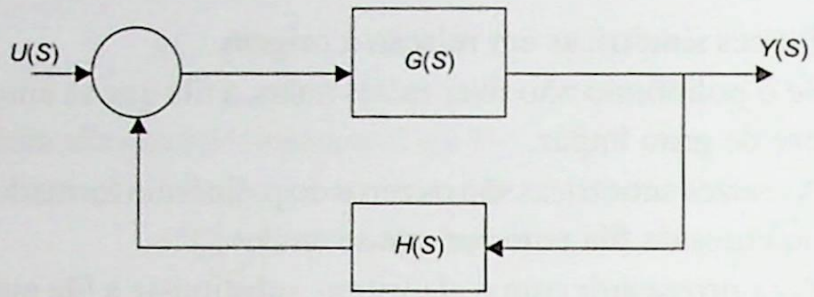
S^4	1	6	8
S^3	2	8	
S^2	2	8	
S^1	4		
S^0	8		

Como não houve troca de sinais na primeira coluna, o sistema de equações não tem raízes com parte real positiva. Consequentemente, as raízes são complexas puramente imaginárias.

INTERVALOS DE VALORES PARA PARÂMETROS DE SISTEMAS DE CONTROLE

O diagrama de blocos da figura a seguir é usual em representações de sistemas de controle. Conforme visto no capítulo 3, a função de transferência resultante

das funções $G(s)$ e $H(S)$ é dada por $Y(S)/U(S) = G(S)/(1+G(S)\,H(S)$. Para as funções definidas abaixo, tem-se a função de malha fechada correspondente $Y(S)/U(S)$.



$$H(S) = 1, G(S) = \frac{1}{S^3 + 2S^2 - S + 3}, \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S^3 + 2S^2 - S + 4}.$$

Dado que o termo em S tem sinal invertido, o sistema é instável, o que é confirmado pela tabela abaixo, onde dois pólos com parte real positiva são identificados:

$$\begin{array}{ll} S^3 & 1 \quad -1 \\ S^2 & 2 \quad 4 \\ S^1 & -3 \\ S^0 & 4 \end{array}$$

Quando o leitor entrar em contato com a teoria de controle, algumas metodologias para estabilizar sistemas instáveis serão apresentadas. Por ora, trataremos do problema de estabilidade através de um ganho (k) na malha. A idéia, portanto, é checar como a resposta dinâmica do sistema varia à medida em que esse ganho se altera. De forma a apresentar o problema de maneira geral, usaremos o mesmo exercício anterior, desta vez dado por:

$$G(S) = \frac{k}{S^3 + 2S^2 - S + 3}, \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{k}{S^3 + 2S^2 - S + 3 + k}.$$

A tabela para este problema é dada por:

$$\begin{array}{ll} S^3 & 1 \quad -1 \\ S^2 & 2 \quad 3+k \\ S^1 & \dfrac{-2-3(3+k)}{2} \\ S^0 & 3+k \end{array}$$

Na tabela anterior, as condições de estabilidade (ausência de troca de sinais na primeira coluna) são dadas por: $-k-5 > 0 \rightarrow k < -5; 3+k > 0 \rightarrow k > -3$. Logo, não há valores de um ganho real k capaz de tornar o sistema estável. Uma alternativa para estabilizar o sistema consiste na inclusão de funções adicionais com valores complexos.

Seja a função de transferência dada por:

$$G(S) = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 9S + 2}, \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 9S + 3}$$

S^3	1	3
S^2	2	9
S^1	$-\frac{3}{2}$	
S^0	9	

Como é possível observar, as trocas de sinais na primeira coluna indicam que há dois pólos com parte real positiva. A inserção de um ganho k produziria:

$$G(S) = \frac{1}{S^3 + 2S^2 + 9S + 2}, \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{k}{S^3 + 2S^2 + 9S + k + 2}$$

S^3	1	$2+k$
S^2	2	9
S^1	$\frac{2k-14}{2}$	
S^0	9	

Assim, para $k > 7$, o sistema fica estável.

A partir do exemplo anterior, pode-se estabelecer o seguinte algoritmo:

- Monta-se a tabela. Esta montagem já deve incluir na malha de controle o ganho k, ainda desconhecido, para estabilizar o sistema.
- Assumindo que não pode haver troca de sinais na primeira coluna, montar um conjunto de inequações que deve ser satisfeito simultaneamente.
- Resolve-se o conjunto de inequações, cuja resposta é um intervalo de valores dos parâmetros ajustados para os quais o sistema é estável.

Note que o algoritmo anterior pode ser aplicado também para estabilidade relativa. Assim, pode-se determinar o valor de ganho para o qual o menor pólo tem parte real menor ou igual a p. De forma a ilustrar esta situação, considere o exemplo anterior. Desta vez, no entanto, deseja-se determinar o ganho de forma que o menor autovalor seja menor que –1/2. A equação característica e a tabela resultante são mostradas abaixo.

$$Q(\hat{S}) = (\hat{S} - 1/2)^3 + 2(\hat{S} - 1/2)^2 + 9(\hat{S} - 1/2) + k + 2$$

$$Q(\hat{S}) = \hat{S}^3 + \frac{\hat{S}^2}{2} + \frac{31}{4}\hat{S} - \frac{17}{8} + k$$

S^3	1	$31/4$
S^2	$1/2$	$-17/8 + k$
S^1	$\frac{6-k}{1/2}$	
S^0	$-17/8 + k$	

Da primeira coluna e das duas ultimas linhas vêm que $17/8 < k < 6$.

É importante enfatizar que este tipo de compensação com ajuste de um ganho real tem suas limitações. Na prática, são utilizadas funções com partes complexas também, cujas metodologias são detalhadas em textos e cursos sobre sistemas de controle.

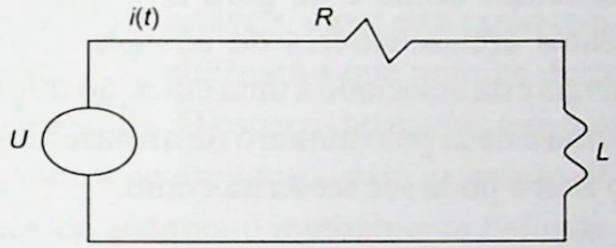
4.7 MODELAGEM POR VARIÁVEIS DE ESTADO E SUBESPAÇO DE VARIÁVEIS

O leitor percebeu, através dos capítulos e seções anteriores, que a análise dinâmica de um sistema consiste basicamente em estudar sua resposta a uma determinada entrada. Assim, a excitação aplicada desempenha um papel bastante importante nessa análise. Obviamente, as condições intrínsecas do sistema, detalhadas durante sua modelagem, também são determinantes neste estudo. Portanto, o estudo completo consiste em determinar as variáveis de estado do sistema. Por variáveis de estado, entendemos aquelas que determinam o ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico. Assim, o espaço de estado é definido pelo conjunto das n variáveis de estado de um sistema. Essas variáveis de estado podem ser agrupadas em um vetor de estados, tal que:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

DIMENSÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

De forma a entender o significado das variáveis de estado, o primeiro ponto importante consiste na determinação do número dessas variáveis (ou incógnitas). Como exemplo, o circuito *RL* abaixo é novamente apresentado e equacionado.



O equacionamento deste circuito é dado por:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Note que a equação acima pode ser organizada da seguinte maneira:

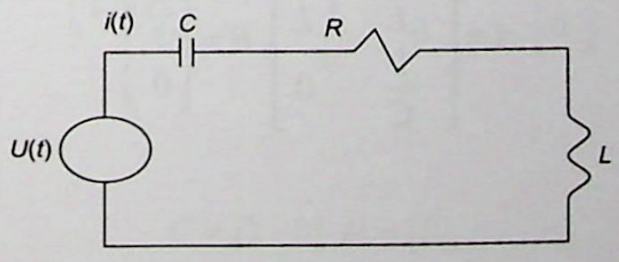
$$\frac{di(t)}{dt} = x' = -\frac{Ri(t)}{L} + \frac{u(t)}{L}.$$

A solução da equação diferencial ordinária acima resolve inteiramente o problema da determinação da variável de estado (i). Note, também, que a equação acima tem a estrutura

$$x' = Ax + Bu,$$

sendo $x' = \dfrac{di(t)}{dt}$, $A = -R/L$ e $B = 1/L$.

Considere agora o seguinte sistema:



O equacionamento deste sistema é dado por:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int idt;$$

$$u(t) = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C};$$

$$u(t)C = RC\frac{di(t)}{dt} + LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} + i(t).$$

Note que a expressão acima é de grau 2, e que o circuito analisado contém dois elementos armazenadores de energia. Como cada elemento armazenador de energia está associado a uma equação diferencial, a ordem da função de transferência é dada pelo número de armazenadores de energia do sistema. A equação acima pode ser reescrita como:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Vc(t),$$

$$i(t) = C\frac{dVc(t)}{dt}.$$

Reorganizando a equação acima, vem:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{R}{L}i(t) - \frac{Vc(t)}{L} + \frac{u(t)}{L},$$

$$\frac{dVc(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}.$$

Notar que, uma vez mais, as equações acima mantêm a estrutura do tipo $x' = Ax+Bu$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que é possível, portanto, reescrever uma equação de ordem n em n equações de primeira ordem. Isso estabelece uma importante propriedade que será empregada em análises. Até este ponto, é de fundamental importância que o leitor sinta-se confortável em relação ao problema de dimensão do conjunto de equações envolvido.

CALCULANDO AS VARIÁVEIS DE ESTADO DE INTERESSE

O exemplo do circuito *RL* (primeira ordem) apresentava somente uma variável de estado ($i(t)$), com solução trivial. Note que o circuito *RLC* já apresenta duas variáveis de estado ($i(t)$, $Vc(t)$). A solução do conjunto de equações tende a fornecer essas duas variáveis, e por esta razão tem-se um conjunto de segunda ordem. Existe uma alternativa que permite determinar um subconjunto das variáveis de estado. O espaço de estados tem dimensão n, enquanto considerando-se m fontes de excitação (para o circuito *RLC*, $n = 2$ e $m = 1$). Note que a dinâmica do sistema é inteiramente definida por suas equações diferenciais. Se um subconjunto das variáveis de estado for o foco, tem-se a formulação abaixo.

$$x' = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

C tem dimensão lxn, sendo l o número de variáveis de estado de interesse, enquanto D tem dimensão lxm. A matriz D, em geral, tem elementos nulos. A exceção ocorre quando a excitação depende de suas derivadas. Para o circuito *RLC*, suponha que se tenha interesse na variável $i(t)$. Neste caso, a formulação seria como segue:

$$x = \begin{bmatrix} i(t) \\ Vc(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], D = [0].$$

A formulação anterior considera as equações diferenciais responsáveis pela dinâmica do sistema ao mesmo tempo em que explicita uma variável de saída. Note que poderia se ter interesse em combinar as duas variáveis de estado em uma só. Considerando que cada uma teria peso 1, as matrizes C e D seriam como mostradas a seguir:

$$C = [1 \quad 1], D = [0]$$

Neste caso, somente as matrizes C e D são mostradas, já que as equações diferenciais não se alteram em função do interesse em uma variável em particular. Se arbitrássemos, por exemplo, peso 3 a $i(t)$ e peso 4 a $Vc(t)$, combinando ambas em uma única variável de saída, teríamos:

$$C = [3 \quad 4], D = [0]$$

Obviamente que o leitor pode julgar estranho combinar duas variáveis diferentes em uma única. Dessa forma, poderíamos explicitar cada uma das variáveis, inicialmente dando peso 1 a cada uma, obtendo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aproveitando o exemplo citado acima, poderíamos considerar a possibilidade de dar peso 3 a $i(t)$ e peso 4 a $Vc(t)$. Dessa vez, no entanto, cada uma deveria ser escrita separadamente, o que daria:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As diferentes situações são bastante interessantes, uma vez que requer do analista um bom entendimento do sistema físico estudado. A partir dessa formulação, necessitamos resolver o sistema de equações. Isso é feito considerando o operador diferencial $x' = px$, o que fornece:

$$px = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du.$$

Manipulando a expressão, obtêm-se as equações abaixo, onde I é a matriz identidade.

$$(pI - A)x = Bu$$

$$x = (pI - A)^{-1} Bu$$

Substituindo em y, tem-se a equação abaixo que fornece os valores de $y(t)$ requeridos.

$$y = (C(pI - A)^{-1} B + D)u.$$

SOLUÇÃO ATRAVÉS DE MATLAB E SCILAB

Note que a manipulação mostrada acima pode ser bastante trabalhosa, e às vezes, até não factível analiticamente, dependendo da dimensão do sistema. Assim, partindo do princípio de que a modelagem e o equacionamento do sistema já tenham sido resolvidos, pode-se usar o Matlab ou o Scilab para obter a solução. O gráfico da corrente no circuito mostrado na figura 4.6 é dado para $R = L = C = 1$ e foi obtido com o uso de Matlab. Um gráfico similar poderia ser obtido com o uso do Scilab.

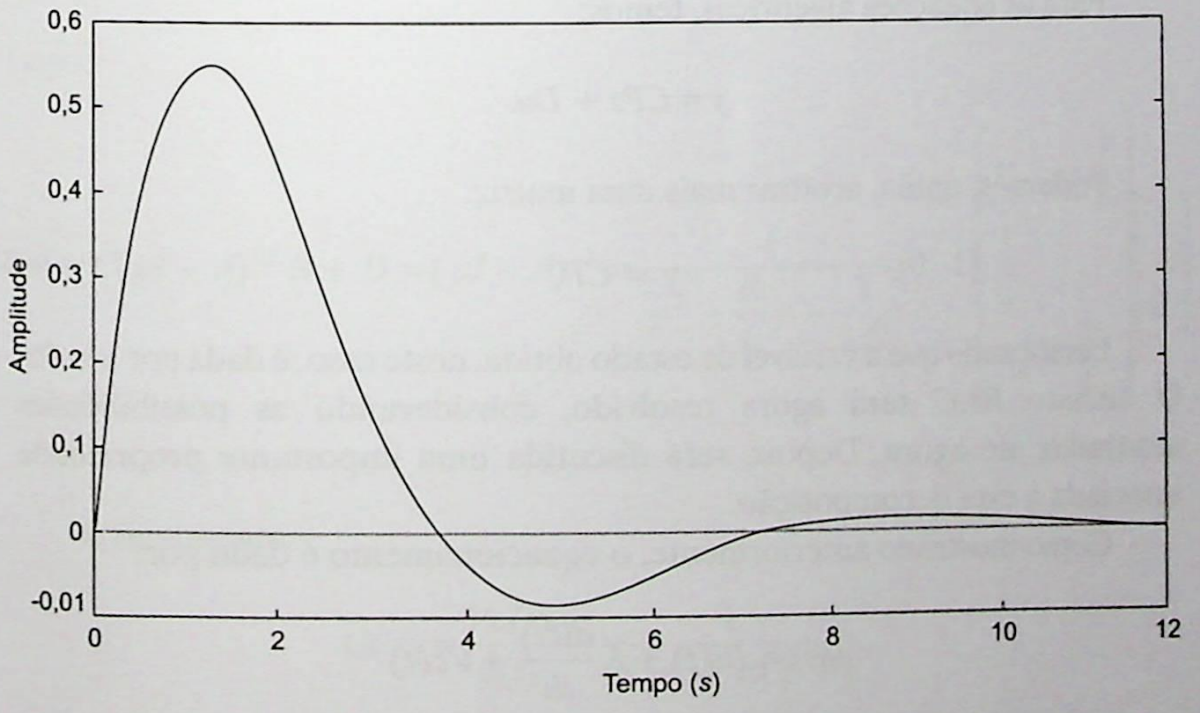


Figura 4.6 Resposta do sistema à entrada degrau.

4.8 VARIÁVEIS MODAIS

A representação por variáveis de estado, como apresentado anteriormente, permite facilidades bastante interessantes. Como já visto no capítulo 2, é possível, a partir de uma matriz, escrever uma outra matriz equivalente que contenha as mesmas características da original. Isso é feito através da decomposição por autovalores e autovetores. Lembrando que é possível desacoplar o sistema de equações, podemos criar uma variável Z tal que:

$$Z = P^{-1}x, \text{ onde } P \text{ é a matriz de autovetores de } A.$$

Substituindo nas outras expressões, obtém-se:

$$Pz = APx + Bu$$

$$z = P^{-1}APx + P^{-1}Bu.$$

Assim, pode-se chamar:

$$\Lambda = P^{-1}AP$$

$$\beta = P^{-1}B.$$

Para as equações algébricas, temos:

$$y = CPz + Du.$$

Podemos, então, arbitrar mais uma matriz:

$$\gamma = CP.$$

Lembrando que a variável de estado obtida, neste caso, é dada por $x = Pz$. O circuito *RLC* será agora resolvido, considerando as possibilidades mostradas até agora. Depois, será discutida uma importante propriedade associada a esta decomposição.

Como mostrado anteriormente, o equacionamento é dado por:

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Vc(t)$$

$$i(t) = C\frac{dVc(t)}{dt}.$$

Assumindo que Vc seja a variável de interesse, a seguinte representação matricial se aplica:

$$x = \begin{bmatrix} i(t) \\ Vc(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \quad 1], D = [0], x = \begin{bmatrix} i \\ Vc \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$pI - A = p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & p \end{bmatrix},$$

o que fornece:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} p & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & p + \frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D = (pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & p + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E finalmente:

$$G(p) = \frac{Vc(t)}{u(t)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

Observe que, apesar de termos interesse em apenas uma variável ($Vc(t)$), a função de transferência é de segunda ordem, dado que esta depende do

número de elementos armazenadores de energia. Resolver pelo método mencionado pode ser bem simples com o auxílio do Matlab e Scilab. O sistema citado pode ser resolvido através de variáveis modais. Antes disso, assumiremos que $L = 2{,}5$, $C = 2$ e $R = 3$. Isso torna $G(S)$ (note que mudamos para o domínio de Laplace sem nenhum prejuízo) numericamente igual a:

$$G(S) = \frac{Vc(S)}{u(S)} = \frac{1}{5S^2 + 6S + 1}.$$

Que pode ser reescrito como:

$$G(S) = \frac{Vc(S)}{u(S)} = \frac{1}{(S + 0{,}2)(S + 1)} = 1{,}25\left(\frac{1}{S + 0{,}2} - \frac{1}{S + 1}\right).$$

A resposta no domínio do tempo é dada por:

$$\frac{Vc(t)}{u(t)} = 1{,}25(e^{-0{,}2t} - e^{-t}).$$

Onde $u(t)$ é a entrada (ou excitação) aplicada ao sistema.
Resolvendo por variáveis modais, tem-se:

$$x = \begin{bmatrix} i(t) \\ Vc(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2{,}5} & -\frac{1}{2{,}5} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2{,}5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1], \; D = [0]$$

Computando os autovalores e autovetores da matriz A, vem:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -0{,}894 & 0{,}371 \\ 0{,}447 & -0{,}928 \end{bmatrix}.$$

Note que não é coincidência que os pólos da função de transferência sejam iguais aos autovalores, já que ambos são as raízes do polinômio característico. Assim, as seguintes decomposições se aplicam:

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0,2 \end{bmatrix}$$

$$\beta = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -0,559 \\ -0,269 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = CP = [0,447 \quad -0,928]$$

$$y = CPz + Du = [0,447i - 0,928Vc].$$

Portanto, o exemplo acima mostra de forma inequívoca que as informações obtidas a partir de um mesmo conjunto de equações devem ser coerentes. O entendimento desta propriedade é de fundamental importância para o estudo de sistemas dinâmicos multivariáveis.

VARIÁVEIS MODAIS EM MATLAB E SCILAB

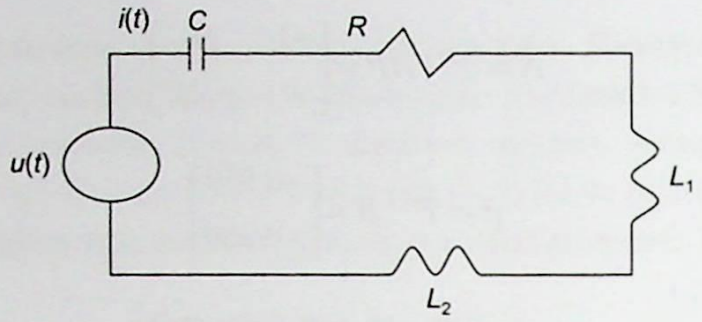
Este é, sem dúvida, um comando muito simples. Para achar as matrizes de autovalores (Λ) e autovetores (P) em Matlab, basta digitar
$[P,v] = eig(A)$<*Enter*>. Em Scilab, usamos uma forma equivalente, dada por $[P,v]=spec(A)$<*Enter*>. Notar que, por conveniência, chamamos Λ de v. Assumindo A como dado anteriormente, vem:

$$P =$$
$$\begin{matrix} -0,8944 & 0,3714 \\ 0,4472 & -0,9285 \end{matrix}$$
$$v =$$
$$\begin{matrix} -1\,0000 & 0 \\ 0 & -0,2000 \end{matrix}$$

Notar que os autovetores P já estão normalizados. A partir deste ponto, a obtenção das outras matrizes é trivial, já que o produto entre duas matrizes A e B é dado por $A * B$.

REDUNDÂNCIA NO EQUACIONAMENTO

Foi dito anteriormente que o número de elementos armazenadores de energia é igual ao número de variáveis de estado, e em conseqüência, igual à dimensão do sistema de equações. Especial atenção deve ser dada, no entanto, para o caso em que redundância de elementos se apresenta. O primeiro caso, bastante óbvio, é visto no circuito *RLC* a seguir.



$$u(t) = Ri(t) + L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} + Vc(t)$$

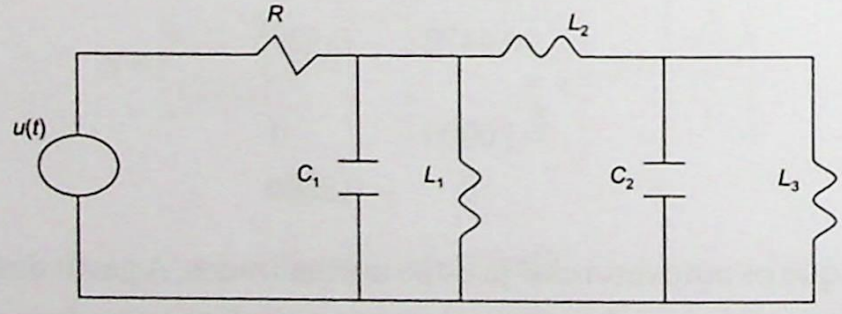
$$i(t) = C\frac{dVc(t)}{dt}$$

Porque a corrente $i(t)$ é a mesma, L_1 e L_2 podem ser agrupados em um só termo, o que forneceria:

$$u(t) = Ri(t) + (L_1 + L_2)\frac{di(t)}{dt} + Vc(t)$$

$$i(t) = C\frac{dVc(t)}{dt}$$

Notar que após a equivalência das indutâncias o problema torna-se idêntico ao anterior. Problema um pouco mais complexo aparece no circuito abaixo.



Em princípio, esperamos lidar com um sistema de equações associado a cinco variáveis de estado. Para este circuito, a seguinte formulação se aplica:

$$u(t) = R(i_{L1} + i_{L2} + C_1 \frac{dV_{C1}}{dt}) + V_{C1}$$

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \frac{di_{L3}}{dt}.$$

Antes mesmo de prosseguir com a formulação, pode-se perceber que:

$$L_1 i_{L1} = L_2 i_{L2} + L_3 i_{L3}.$$

Isso caracteriza uma dependência linear entre três variáveis de estado, o que nos permite eliminar uma delas. Assim, determina-se como vetor de estados:

$$x = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L3} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}.$$

A representação matricial é obtida a partir do equacionamento remanescente:

$$V_{C2} = L_3 \frac{dI_{L3}}{dt},$$

$$V_{C1} = L_1 \frac{dI_{L1}}{dt},$$

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = i_{L3} + \frac{L_1}{L_2} i_{L1} + \frac{L_3}{L_2} i_{L3}.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i'_{L1} \\ i'_{L3} \\ V'_{C1} \\ V'_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{L_1}{C_2 L_2} & \frac{L_3}{C_2 L_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L3} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{RC_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.9 MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Este método será melhor explorado nos itens seguintes. No entanto, dado que o foco deste capítulo é a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, esta teoria será brevemente apresentada.

O método direto de Lyapunov (também chamado de método de função de energia) apresenta uma elegante alternativa de análise de estabilidade. Sua principal característica reside no fato da resposta qualitativa de um sistema ser obtida sem a necessidade da obtenção da solução explícita das equações diferenciais do modelo. A figura abaixo serve de partida para o entendimento do método, cuja ilustração consta de uma região côncava com um objeto móvel (por exemplo, uma esfera).

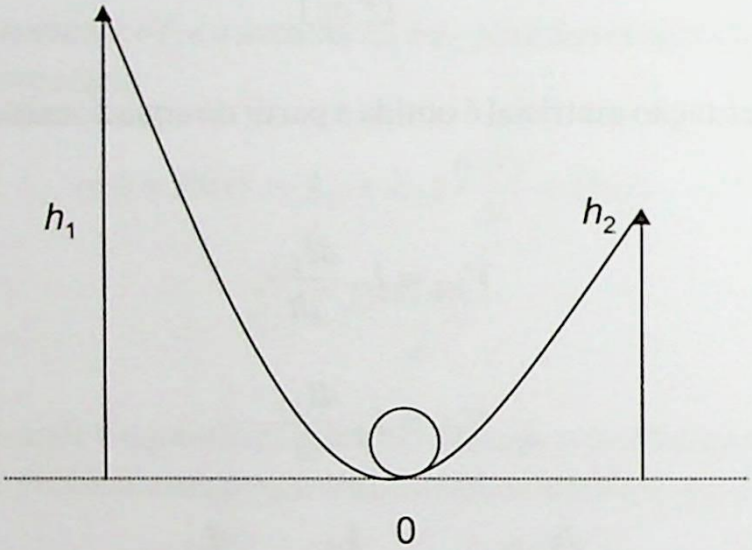


Figura 4.7 Ilustração do fundamento do método de Lyapunov.

A estabilidade do sistema acima depende das seguintes características:

- Características da esfera, em particular, sua massa.
- Interação entre a esfera e a superfície da região, representada pelo atrito.
- Força aplicada à esfera, que representa a entrada ou o distúrbio do sistema.

Para o caso em que não há atrito entre a esfera e a superfície, a mesma pode ser liberada da altura h_2 (ou receber um distúrbio a partir do ponto 0 que a leve até h_2), o sistema será oscilatório ao redor de 0. Isso é facilmente percebido, na medida em que a energia potencial (mgh_2) será continuamente armazenada no sistema (não há atrito), havendo uma troca entre energia cinética e potencial. Para o caso em que o atrito é considerado, no entanto, o sistema não

será mais oscilatório, na medida em que o atrito se traduz em uma dissipação de energia, o que leva o sistema a repousar no ponto 0. Logo, esse ponto é conhecido como um ponto de energia nula. É importante percebermos que a consideração de atrito muda inteiramente o problema. Dependendo do coeficiente de atrito entre o corpo e a superfície, é possível até mesmo que a esfera seja liberada da altura h_1 e ainda mantenha um comportamento estável. Isso só é possível de ser respondido através de uma análise mais detalhada, apresentada a seguir.

DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE

a) Estável

Quando o sistema é estável, o efeito do distúrbio é pequeno. A definição formal é dada como segue.

Para um real $\varepsilon > 0$ e tempo inicial $t_0 > 0$, existe um real $\delta > 0$ dependendo de ε, satisfazendo:

$$\|X_0\| < \delta,$$

e também

$$\|X(t)\| < \varepsilon, \text{ para todo } t > t_0.$$

A representação $\|.\|$ pode ser a norma Euclidiana, dada por

$$\|X\| = (\sum x_i^2)^{1/2}.$$

A representação gráfica é vista na figura 4.8.

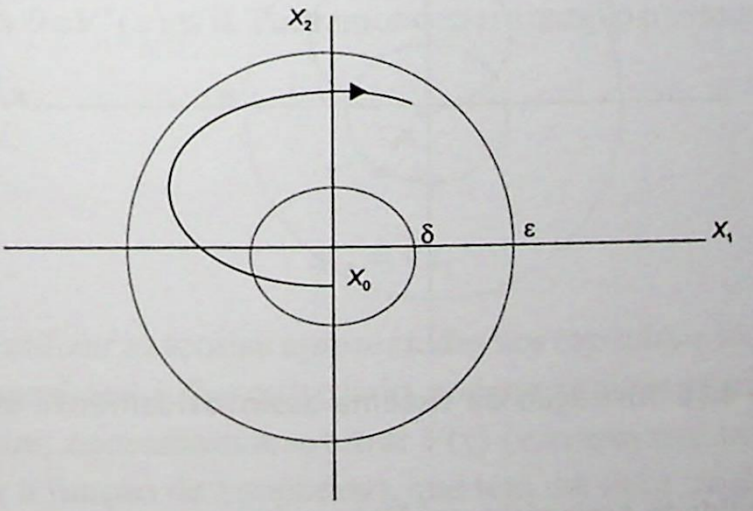


Figura 4.8 Ilustração de sistema estável.

Note que o ponto de partida está dentro da região δ, e em instante nenhum, durante a trajetória, o sistema sai da região ε.

b) Instável

Neste caso, o sistema é levado à instabilidade, refletida no afastamento da região ε. Este caso é mostrado na figura 4.9.

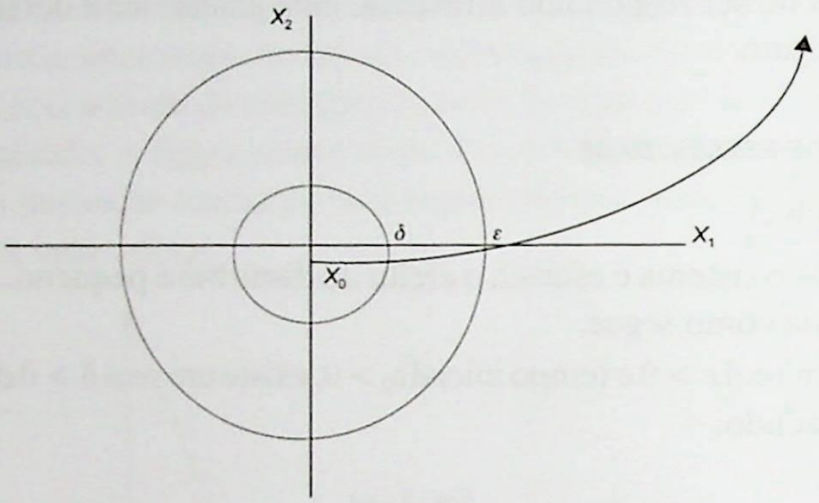


Figura 4.9 Ilustração de sistema instável.

c) Estabilidade Assintótica

Neste caso, o efeito do distúrbio desaparece com o tempo, conforme mostrado na figura 4.10. Isso se reflete no fato da trajetória oscilar dentro da região ε, mas convergir para a região δ. Note que esse conceito, conhecido como local, depende dos valores de δ e ε.

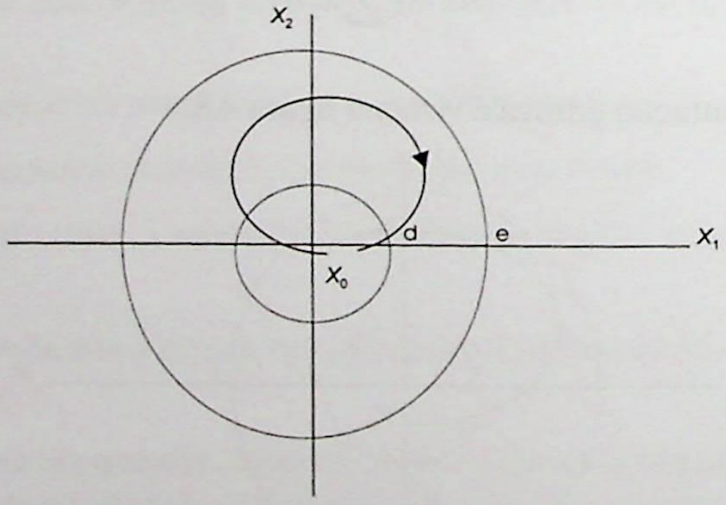


Figura 4.10 Ilustração de sistema assintoticamente estável.

d) Estabilidade Assintótica ao Extremo.

É um caso em que, independente da magnitude do distúrbio, o efeito desaparece com o tempo, a figura 4.11 retrata essa situação.

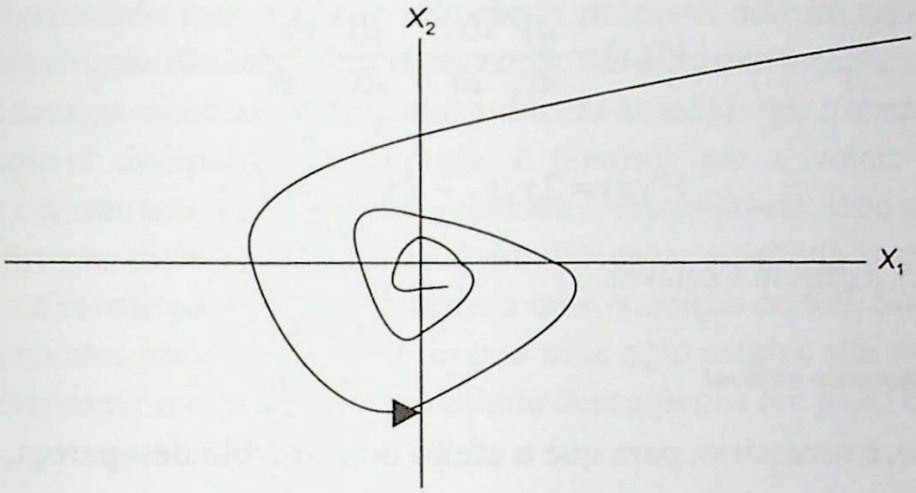


Figura 4.11 Ilustração de sistema assintoticamente estável ao extremo.

TEOREMAS DA ESTABILIDADE

Como visto no exemplo da esfera na superfície, mostrada na figura 4.7, é necessário que haja atrito para que o corpo convirja para o ponto 0. No entanto, o atrito representa a dissipação de energia através da interação entre os componentes do sistema dinâmico. Assim, não é uma má idéia associar, pelo menos em princípio, o conceito de Lyapunov à energia armazenada pelo sistema. Isso ajuda no entendimento dos teoremas mostrados a seguir.

Estável

Chamando a função de Lyapunov de $V(x)$, temos como condições de estabilidade que $V(x) > 0$ e $V'(x) \leq 0$. Tomemos como exemplo o sistema de equações abaixo.

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = -x_1$$

Podemos utilizar as teorias apresentadas nos capítulos e seções anteriores para resolver esse sistema. Por outro lado, podemos utilizar o Método Direto de Lyapunov. Assim, necessitamos arbitrar $V(x)$ (veremos que existem métodos para identificar a função de Lyapunov), que tem um valor escalar (lembrar de que a energia total de um sistema é dada por um escalar). Para o sistema em

questão, escolhe-se $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, que é positiva definida, de forma que a condição $V(x) > 0$ será sempre satisfeita. A sua derivada é dada por:

$$V'(x) = \frac{dV}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dV}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$V'(x) = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

Logo, a origem é estável.

Assintoticamente estável

Neste caso, é necessário, para que o efeito do distúrbio desapareça, que haja dissipação de energia. Assim, as duas condições fundamentais requerem que $V(x) > 0$ e $V'(x) < 0$. O exemplo a seguir ilustra essa situação.

$$x'_1 = x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2)$$

$$x'_2 = x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2)$$

$$a > 0$$

Escolhe-se $V(x)$, como antes dado por $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, o que gera $V'(x) = -2a(x_1^2 + x_2^2) = -2aV^2(x)$. Portanto, a origem é assintoticamente estável.

TEOREMA DA ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

Uma aplicação bastante interessante da teoria de Lyapunov refere-se à determinação da região de estabilidade. Assim, como no exemplo da figura 4.7, desejava-se determinar a máxima altura h_1 para a qual a bolinha permaneceria na superfície. Outros sistemas dinâmicos apresentam o mesmo tipo de problema. Assuma $x' = f(x), f(0) = 0$.

A função de Lyapunov $V(x)$ é um escalar, como dito anteriormente, e ρ é a região onde $V(x) > 0$. Se ρ é limitado e

a) $V(x) > 0$

b) $V'(x) \leq 0$

Assim, a origem é estável se todos os movimentos, começando em r, convergem para a origem quanto $t \to \infty$. Uma estimativa da região de estabilidade pode ser dada por V_{min}, onde V_{min} é o menor valor da superfície em que, a partir deste instante, o sistema torna-se instável. Logo, a região determinada

por $V(x) < V_{min}$ está contida na região de estabilidade assintótica. Note que a escolha de $V(x)$ influencia a região de estabilidade.

É interessante que o leitor perceba o processo descrito nesta seção. Assuma um sistema dinâmico em repouso. Se um distúrbio for aplicado a esse sistema, a energia associada ao mesmo aumenta à medida que o tempo evolui. Se não houver dissipação de energia, é possível que a mesma venha a aumentar continuamente, levando o sistema à instabilidade. Esse problema pode apresentar duas soluções. No primeiro caso, a própria estrutura do sistema é suficiente para levar o sistema a uma condição estável. No segundo caso, no entanto, pode ser necessário que uma ação externa seja executada. Assim, determinar a região de estabilidade desempenha um papel crucial na análise.

FUNÇÃO DE LYAPUNOV PARA UM SISTEMA LINEAR

Nos exemplos anteriores, a função de Lyapunov foi arbitrariamente escolhida. Isso pode tornar o método de Lyapunov especialmente enfadonho e pouco preciso. Existem algumas técnicas que nos auxiliam na escolha dessa função. Neste livro, trataremos da função para sistema linear e o método da primeira integral (para sistemas não-lineares). Outras técnicas, como forma quadrática, gradiente e método de Zubov não serão endereçados aqui. Para o caso de funções lineares, assuma a equação $A^TP+PA = -Q$, onde Q pode ser a matriz identidade, por conveniência. Escolhendo $V(x)=x^TPx$, onde $P = P^T$ é positiva definida (P^T representa a transposta da matriz P). Então:

$$V(x) = x^T Px + x^T Px.$$

Lembrando que $x = Ax$, $x^T = x^TA^T$, tem-se que $V(x) = x^T(A^TP+PA)x = -x^TQx$.

Portanto, se P for positivo, definido $V(x) > 0$ e $V'(x) < 0$, fica estabelecida a função de Lyapunov. O circuito *RLC* é usado novamente como exemplo. Para esse circuito, assumindo $R = 4$ e $L = C = 1$, vem:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A partir de $A^TP+PA = -Q$, temos que P é dado por:

$$\begin{bmatrix} -4 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P=\begin{bmatrix}1/4 & 1/2\\ 1/2 & 9/4\end{bmatrix}.$$

Notar que, na solução acima, o elemento P_1 teve seu valor arbitrado para que o sistema de equações tivesse solução. Observe também que P é positiva definida.

Um exemplo ainda mais interessante é mostrado no circuito LC da figura abaixo. Como não há resistência, sabemos, *a priori*, que este sistema é oscilatório, o que deve se refletir em:

$$V'(x)=0$$

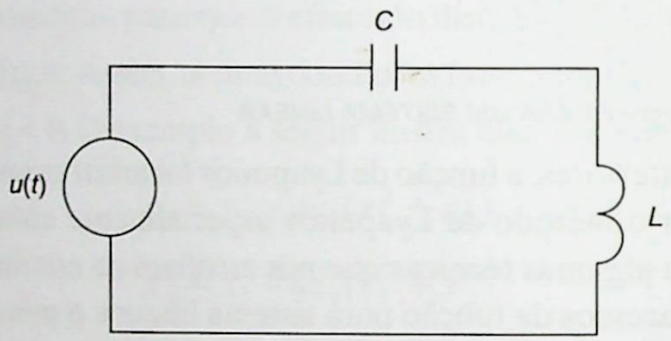


Figura 4.12 Circuito *LC*.

A representação matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix}i'\\ V'_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i\\ V_C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u.$$

Para $L = C = 1$, os autovalores da matriz de estados são dados por $j1$ e $-j1$. A solução de $A^TP+PA = -Q$ fornece a expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_3 & P_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_3 & P_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

A partir do equacionamento anterior, as seguintes relações são observadas para *P:*

$$-\frac{P_2}{L}-\frac{P_3}{L}=-1;$$

$$\frac{P_4}{C}-\frac{P_1}{L}=0;$$

$$\frac{P_3}{C}-\frac{P_2}{C}=-1.$$

Notar que as expressões para P_2 e P_3 indicam que o sistema não tem solução. Portanto, para esse tipo de sistema, não é possível estabelecer uma função de Lyapunov através de um método linear. O sistema acima não tem solução por uma razão bastante simples. Uma condição, ainda não mostrada aqui, para que esse método funcione, consiste no fato de que os autovalores da matriz de estado não podem ter soma igual a zero. Este é exatamente o caso em questão, uma vez que os autovalores da matriz de estado são dados por $+jw$ e $-jw$, fornecendo somatório igual a zero. A alternativa para resolver esse problema é dada por:

$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$$

$$0=L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i$$

Chamando $\begin{cases} i=I_1 \\ i'=\dfrac{di}{dt}=I_2 \end{cases}$, temos a seguinte formulação:

$$LI_2+\frac{1}{C}I_1=0;$$

$$LI_2=-\frac{1}{C}I_1.$$

O que fornece:

$$\frac{dI_1}{dI_2}=\frac{I_2}{-\dfrac{1}{LC}I_1};$$

$$\frac{-I_1^2}{LC} = I_2^2.$$

Logo, $V(I)$ pode ser dado por $I_1^2 + LCI_2^2 = 0$. A derivada desta função é mostrada abaixo e, representa, portanto, o resultado esperado.

$$V'(I) = \frac{dV}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} + \frac{dV}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} = 2I_1 I_2 + 2I_2(-\frac{I_1}{LC})LC = 0$$

MÉTODO DA PRIMEIRA INTEGRAL PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES

Este método se baseia na combinação linear das funções integrais das equações do sistema. Muito embora não tenha sido apresentado previamente ao leitor, o exemplo anterior do circuito LC empregou esse método.

É importante lembrar que a energia total de um sistema estabelece a estabilidade de um ponto de equilíbrio, o que torna esse método particularmente justificável. Considere

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

que representa a forma geral de $x' = f(x)$, $f(0) = 0$. Uma condição necessária e suficiente para a existência da primeira integral é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

O exemplo a seguir ilustra essa situação.

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = -4x_1^3 - 4x_1$$

A equação acima pode ser manipulada como segue:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-4x_1^3 - 4x_1}.$$

Multiplicando os dois lados e integrando, vem:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + x_1^4 + 2x_1^2.$$

Note que $V(0,0) = 0$, $V'(x_1,x_2) > 0$, o que estabelece as condições de estabilidade do sistema.

4.10 EXERCÍCIOS

1. Desmembre as funções abaixo por frações parciais. Classifique cada uma delas (imprópria, estritamente própria ou própria).

a) $F(S) = \dfrac{(S+1{,}5)(S+2)}{(S+3)(S+5)(S+6)}$

b) $F(S) = \dfrac{(S+2)(S+1)}{(S+4)^2}$

c) $F(S) = \dfrac{(S+4)(S+2)(S+1)}{(S+5)(S+6)}$

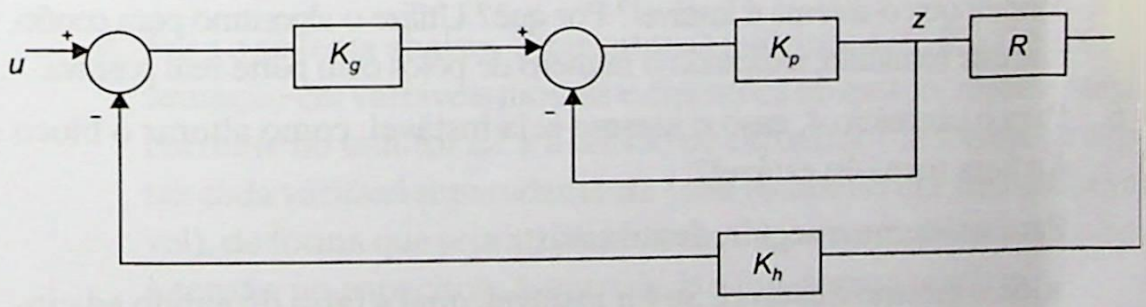
d) $F(S) = \dfrac{(S+6)(S+2)}{(S+1)(S+10)(S+12)}$

e) $F(S) = \dfrac{(S+3)}{(S+2)(S+9)^2}$

2. Para o sistema abaixo, x e z se relacionam através de $L\,z = y$. Determine o bloco R, para então:

   a) Determinar as raízes do sistema.

   b) Discutir este resultado qualitativamente.

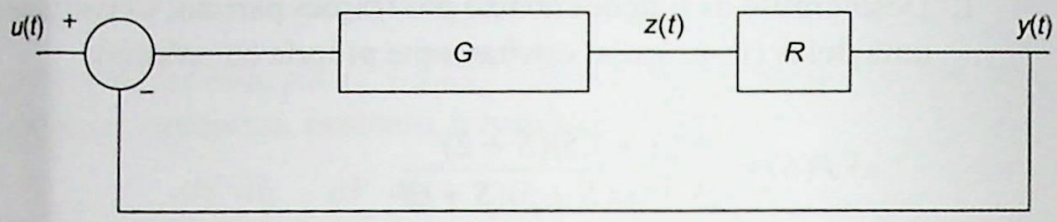


3. Seja a função $G = 1/(4\,S + 6)$ no sistema a seguir. Sabe-se que $dy / dt = z$. Determinar:

   a) O bloco R.

   b) Se os pólos do sistema são todos menores que –2 (usar o algoritmo de Routh).

c) É necessário empregar o algoritmo? Por quê?

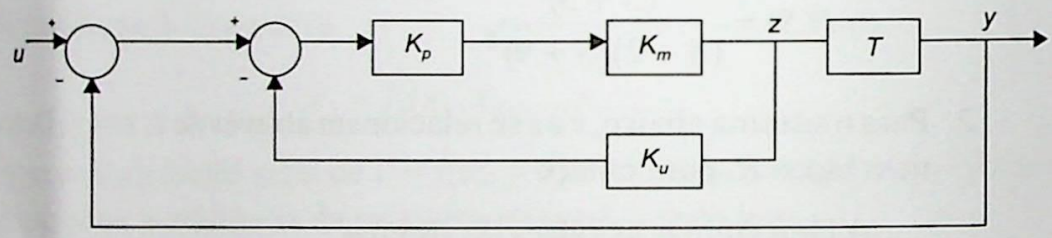


4. Para o sistema abaixo, a relação entre y e z é dada por

$$\ddot{y} = K_g z(\frac{d^2 y}{dt^2} = kz):$$

a) O sistema é estável?

b) Justificar.

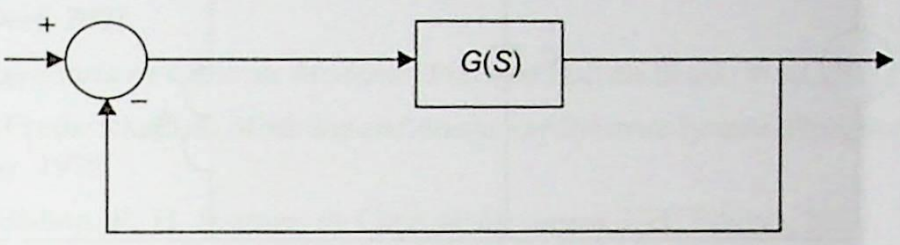


5. É necessário avaliar a função $S^4 + 2S^3 + 4S^2 - 3S + 1$ por Routh-Hurwitz para concluir que o sistema é instável? Por quê? Utilize o algoritmo para confirmar este resultado, indicando o número de pólos com parte real positiva.
6. Para o exercício 4, caso o mesmo seja instável, como alterar o bloco *Kp* para torná-lo estável?
7. Para o sistema a seguir, determinar:

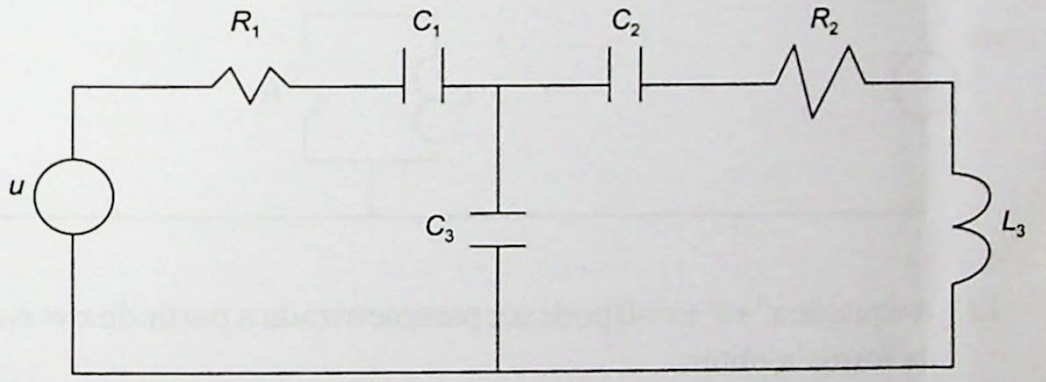
a) Se o mesmo é estável. Se for instável, qual a faixa do ganho adicionado necessário para torná-lo estável.

b) Um valor dentro da faixa encontrada de ganho para comprovar a estabilidade do sistema.

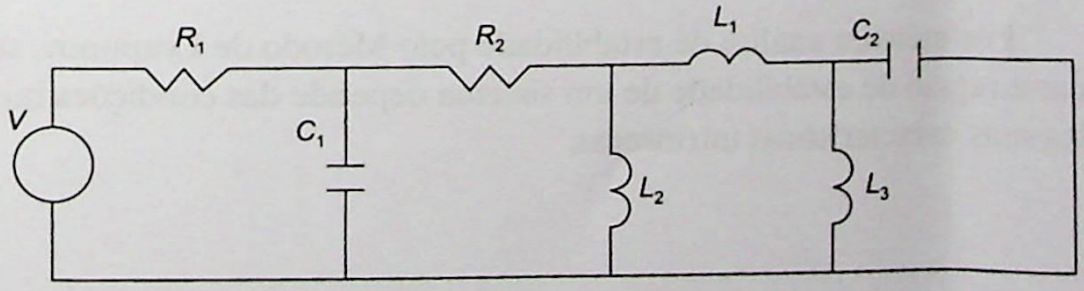
$$G(S) = \frac{2S+1}{S^4 + S^3 + 3S^2 + 2S + 1}$$



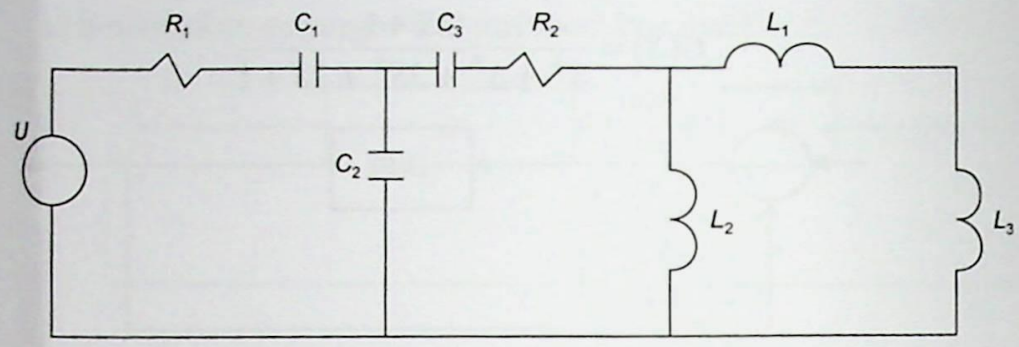
8. Para o circuito abaixo, determine as matrizes A, B, C e D para análise de variáveis e equações de estado. Deseja-se que a saída contenha explicitamente I_{C2} e V_{C2}, sem que estas variáveis sejam combinadas em uma única variável. Arbitra-se peso 2 a I_{C2} e peso 4 a V_{C2}. Caso haja alguma(s) redundância(s), esta(s) deve(m) estar considerada(s) nas matrizes pedidas.



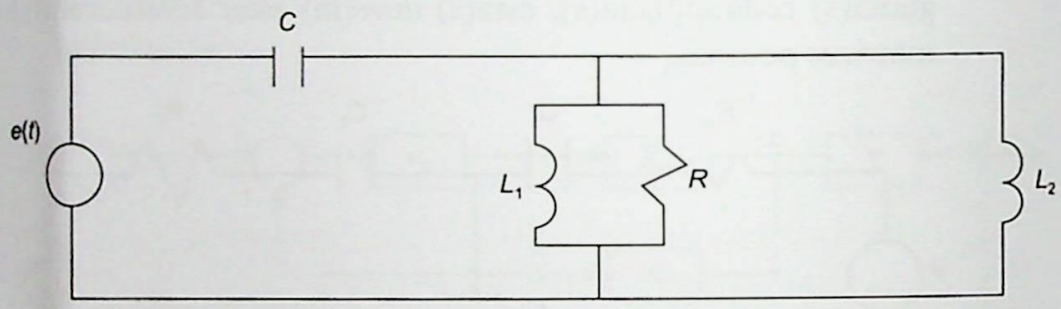
9. Para o sistema abaixo, apresentar as matrizes A, B, C e D para representação em variáveis modais e equações de estado, representando a corrente no indutor $L1$ e a tensão no capacitor $C2$. Deseja-se explicitar cada variável separadamente (não combinar em uma única variável), de forma que seja atribuído peso 3 à corrente no indutor e peso 2 à tensão no capacitor. A entrada V é um degrau unitário.



10. Determine, para o sistema seguinte, as matrizes A, B, C e D para análise por equações de estado. Deseja-se, separadamente, relacionar V_{C3} e I_{L2} em função da excitação, dando peso 2 a V_{C3} e peso 5 a I_{L2}.



11. Para o sistema abaixo, determine a relação I_{L1} e V_c em relação à entrada $e(t)$ por variáveis de estado (basta preparar as matrizes A, B, C e D).



12. A equação $x''+x'+x=0$ pode ser parametrizada a partir de $x = x_1$ e $x' = x_2$, de forma a obter:

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = -x_1 - x_2$$

Definindo a função de Lyapunov como $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, analise a condição de estabilidade do sistema (estável, instável ou assintoticamente estável).

13. Justificar a frase abaixo.

Por meio da análise de estabilidade pelo Método de Lyapunov, sabe-se que a região de estabilidade de um sistema depende das condições iniciais e das suas características intrínsecas.

4.11 REFERÊNCIAS

Métodos de análise de sistemas dinâmicos em geral são encontrados em *Ogata, 1998, Close, 1998* e *Dorf, 2001.*

Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, 4ª ed., 2003.

Close, C. M.; Frederick, D. K. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. Houghton Mifflin Company, 1978.

Dorf, R. C.; Bishop, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC Editora, 2001.

Capítulo 5

Respostas Típicas de Modelos de Sistemas Dinâmicos

5.1 INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos lineares de sistemas dinâmicos apresentam respostas típicas que os caracterizam. Essas respostas dependem das raízes dos modelos e dos tipos de excitações das entradas dos mesmos. As entradas de excitações mais usuais são funções do tipo impulso, degrau, rampa e senoidal. As respostas podem ser obtidas através de métodos analíticos ou numéricos quando se conhecem os modelos matemáticos dos sistemas, ou mediante medidas experimentais efetuadas em sistemas reais.

5.2 SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Foi mostrado no capítulo 3 que vários sistemas práticos (elétricos, mecânicos, térmicos, químicos e outros) são modelados por funções de primeira ordem similares às equações (3.1), (3.2), (3.5), (3.8), (3.12), (3.18) e (3.20). Uma representação genérica de um sistema de primeira ordem é dada pela expressão (5.1), em que a função de transferência define a relação entre a saída do sistema pela sua entrada. O parâmetro τ é chamado de constante de tempo e K é conhecido como ganho do sistema. O pólo da função é $s = -1/\tau$.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K}{s\tau + 1} \tag{5.1}$$

Usando os métodos matemáticos vistos em cursos de cálculo e revisados nos capítulos 2 e 4, é fácil calcular a resposta analítica deste modelo para uma

entrada degrau, cuja solução é dada por (5.2). Resultados numéricos também podem ser obtidos, utilizando-se programas computacionais ou pacotes de simulação específicos.

$$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau}) \tag{5.2}$$

EXEMPLO 5.1

Sistema de Primeira Ordem. Seja o circuito resistivo-capacitivo ilustrado na figura 3.2 e modelado pela equação (3.2), onde $y = v_f$ e $u = v_e$. Com os valores R=10 [$k\Omega$] e C = 100 [μF], têm-se $K = 1$ e $\tau = 1$. O gráfico resultante da simulação deste sistema está ilustrado na figura 5.1. Sistemas de primeira ordem apresentam este tipo de resposta característica para entradas tipo degrau, onde a saída do sistema tende a estabilizar em um valor proporcional à excitação de entrada (neste exemplo um degrau unitário). Para o instante de tempo $t = \tau = 1$, a saída $y(t)$ possui um valor que é aproximadamente 63% do valor final. Quanto menor o parâmetro τ (a constante de tempo), mais rápido o sistema responde (mais rapidamente atinge a cota de 63% ou o próprio valor final). Quanto menores os valores dos parâmetros (R ou C) no circuito citado, menor será o valor de τ. Esse sistema pode ser facilmente montado em laboratório para comprovar experimentalmente a sua resposta.

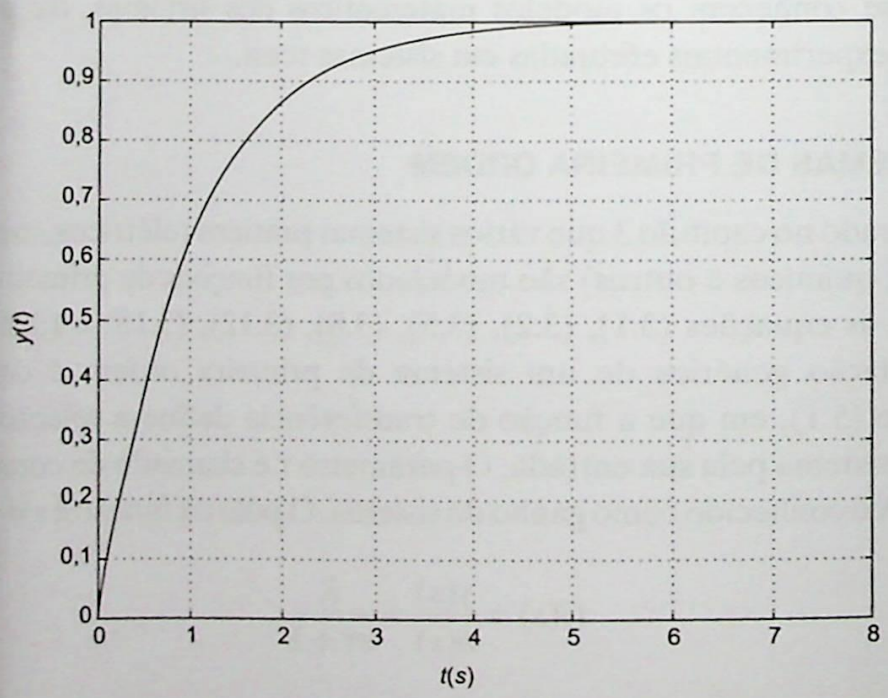


Figura 5.1 Resposta do modelo de primeira ordem do exemplo 5.1 para entrada degrau unitário.

Para uma entrada degrau unitário, o valor final da variável $y(\infty)$ tende à unidade, assim 63% corresponde ao valor $y\,(t) = 0{,}63$ (para $t = 1\,[s]$).

Para um valor de constante de tempo igual a $\tau = 0{,}5$, o valor da saída seria $y\,(t) = 0{,}63$ e ocorreria em um tempo $t = 0{,}5\,[s]$, e assim sucessivamente para outros valores.

Com o parâmetro $K = 10$, o valor final da variável de saída tenderia a $y\,(\infty) = 10$ (63% deste valor seria 6,3), e de maneira proporcional para outros valores.

Sinais de excitação do tipo senoidal são usados para obter a chamada resposta em freqüência de um sistema dinâmico. Esse tipo de resposta é definido como sendo a relação entre amplitudes e a diferença de fase entre os sinais de entrada e saída de um sistema em regime permanente, variando-se a freqüência do sinal de excitação da entrada do mesmo. Os dados obtidos podem ser expressos graficamente por meio de curvas de módulo e fase pela freqüência. Os gráficos resultantes recebem o nome de modelo não-paramétrico. Os dados relativos a um determinado sistema podem ser obtidos por métodos analíticos ou numéricos quando se conhece o modelo do sistema, ou provenientes de medidas experimentais de um sistema real. Conhecida a função de transferência de um sistema, basta substituir o operador de Laplace s por jW, em que a letra j é a notação de número complexo. Na função complexa resultante, variando-se o valor da freqüência W (dentro de uma determinada faixa de interesse), é fácil obter os valores de módulo e fase correspondentes. Sistemas físicos reais podem ser ensaiados para se obter experimentalmente suas respostas em freqüência. Ensaios para o circuito resistivo-capacitivo descrito anteriormente são facilmente implementados na prática. Em simulações numéricas, existem *softwares* comerciais que facilitam a obtenção de respostas em freqüência de sistemas dinâmicos. A figura 5.2 ilustra a resposta em freqüência do exemplo 5.1. Os gráficos resultantes também são conhecidos como diagramas de Bode e são utilizados em vários métodos de análise e sintonia de sistemas de controle descritos em textos relativos a estes temas.

No domínio da freqüência, um modelo de primeira ordem apresenta as seguintes características: fase variando de 0° até –90°; na freqüência $1/\tau$ (neste exemplo 1 $[rd/s]$), a fase está em torno de –45° (e o módulo em –3 $[dB]$); e a partir dessa freqüência, conhecida como de corte ou de canto, a curva de módulo tem uma inclinação de –20 $[dB]$ por década de freqüência. Quanto menor a constante de tempo (τ), maior a freqüência de corte e vice-versa. Para valores de ganho maiores que a unidade, a curva de módulo desloca-se acima da linha de 0 $[dB]$. Ganhos menores fazem a curva de módulo deslocar abaixo dessa cota. A relação entre as amplitudes ou módulos em decibéis é dada por:

$$[dB] = 20\,log\,|\,y/u\,|\,.$$

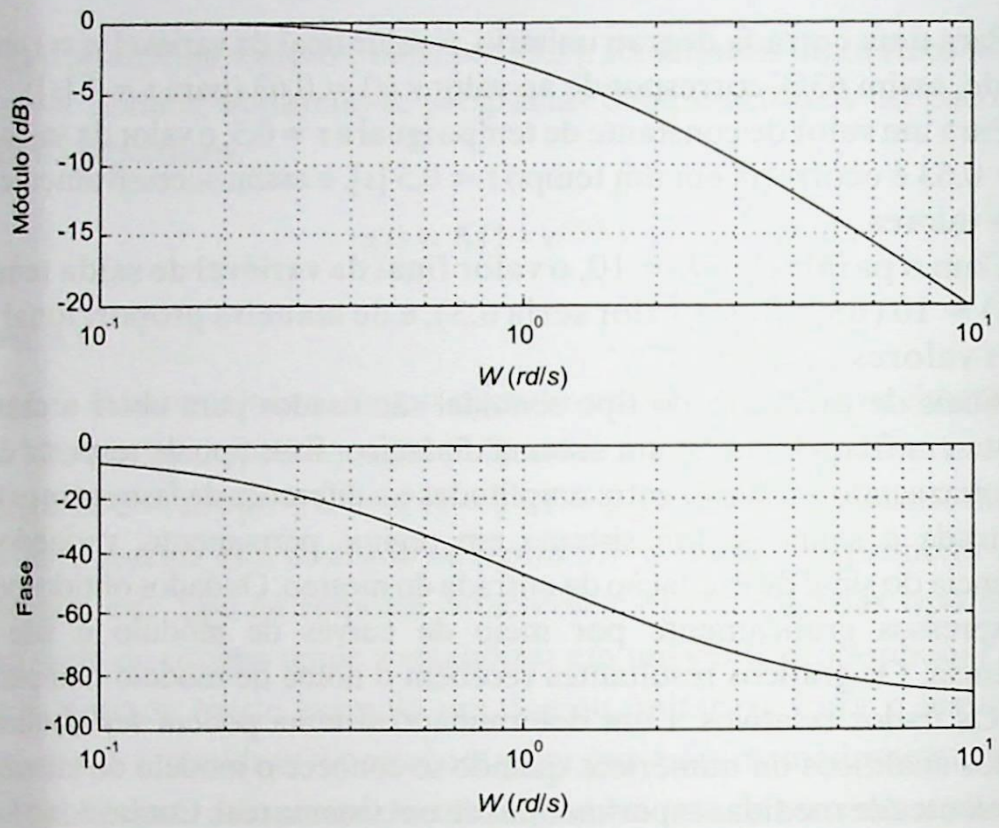


Figura 5.2 Resposta em freqüência de modelo de primeira ordem do exemplo 5.1.

Todas essas características são facilmente verificadas, usando-se conceitos de números complexos. No domínio da freqüência, a função de transferência do modelo de primeira ordem é:

$$G(jW) = \frac{K}{jW\tau + 1}.$$

Obtendo o módulo e a fase do número complexo correspondente a $G(jW)$, vem:

$$|G(jW)| = \frac{1}{\sqrt{W^2\tau^2 + 1}}; \qquad \angle G(jW) = -\tan^{-1} W\tau.$$

Com $K = 1$ e $\tau = 1$, na freqüência $W = 1/\tau$ (neste caso 1 [rd/s]), o módulo da função tem o valor de $|\ G(j)\ | \cong 0{,}707$ (ou -3 [dB]), e a fase de $\angle G(j) = -45°$. Usando uma faixa de interesse de valores de W, é fácil calcular os valores de, módulo e fase pela freqüência. Os valores necessários para construir gráficos similares aos da figura 5.2 estão mostrados na tabela 5.1 referentes ao exemplo 5.1.

Tabela 5.1 Valores de módulo e fase de G (*jW*) do exemplo 5.1

W [*rd/s*]	Módulo	Módulo [*dB*]	Fase [grau]
0,1	0,9950	–0,04	–5,7
0,6	0,8575	–1,34	–30,9
1,1	0,6727	–3,44	–47,7
1,6	0,5300	–5,51	–57,9
2,1	0,4299	–7,33	–64,5
2,6	0,3590	–8,90	–68,9
3,1	0,3070	–10,26	–72,1
3,6	0,2676	–11,45	–74,4
4,1	0,2370	–12,51	–76,3
4,6	0,2124	–13,46	–77,7
5,1	0,1924	–14,32	–78,9
5,6	0,1758	–15,10	–79,9
6,1	0,1618	–15,82	–80,7
6,6	0,1498	–16,49	–81,4
7,1	0,1395	–17,11	–81,9
7,6	0,1305	–17,69	–82,5
8,1	0,1225	–18,24	–82,9
8,6	0,1155	–18,75	–83,4
9,1	0,1092	–19,23	–83,7
9,6	0,1036	–19,69	–84,1

A interpretação física da resposta em freqüência, decorrente de um ensaio experimental em um sistema dinâmico, está ilustrada na figura 5.3. A entrada do sistema é excitada por um sinal do tipo $u\ (t) = u_m sin\ (Wt)$, obtendo-se na saída um sinal dado por $y(t) = y_m sin(Wt+\varphi)$, sendo $W = 2\pi/T$. Onde a fase do sistema é dada por $\varphi = 2\pi\, t_0/T$ (ou $\varphi = 360 t_0/T$), e o módulo (M) é expresso pela relação $M = y_m/u_m$, sendo que em decibéis é $[dB]=20\ log\ (M)$.

Desse modo, a tabela 5.1 poderia ser obtida experimentalmente se fosse realizado um ensaio prático em um sistema igual ao do exemplo 5.1.

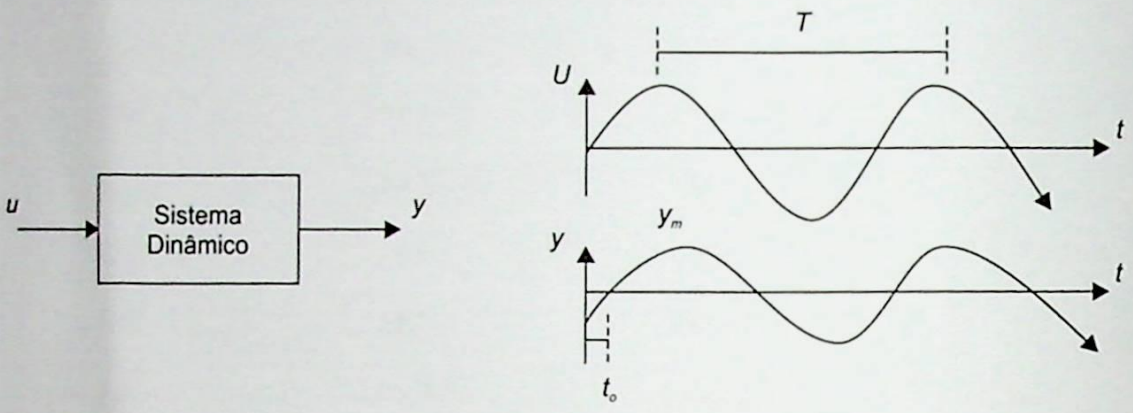


Figura 5.3 Interpretação física da obtenção da resposta em freqüência de um sistema dinâmico.

5.3 SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

No capítulo 3 foram vistos alguns sistemas dinâmicos (elétricos, mecânicos e outros) modelados por funções de segunda ordem similares às equações (3.3), (3.6) e (3.24) ou equivalentes. Uma representação genérica de um sistema de segunda ordem é dada pela expressão (5.3), cujas raízes são: $s = -\zeta W_n \pm j\, W_n(1-\zeta^2)^{1/2}$.

O parâmetro ζ é conhecido como fator de amortecimento e W_n é chamada de freqüência natural de oscilação. Usando métodos matemáticos conhecidos, é fácil calcular a resposta analítica de um sistema de segunda ordem para uma entrada tipo degrau, obtendo-se a expressão (5.4).

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2} \tag{5.3}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta W_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\sqrt{1-\zeta^2}\, W_n t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \tag{5.4}$$

EXEMPLO 5.2

Sistema de Segunda Ordem. Seja o circuito resistivo-indutivo-capacitivo indicado na figura 3.3 e modelado pela equação (3.3), onde $y = v_f$ e $u = v_e$. Os parâmetros típicos são: $W_n = 1/(LC)^{1/2}$.; $\zeta = R\,[(C/L)^{1/2}]/2$. Para $R = 200\,[\Omega]$,

$L = 20\,[mH]$ e $C = 0{,}1\,[\mu F]$, têm-se: $W_n \cong 22361\,[rd/s]$; $\zeta \cong 0{,}22$. Modificando o valor de R, no circuito para 330 e 1 000 [Ω], varia-se ζ em 0,36 e 1,1, respectivamente. Resultados numéricos deste modelo podem ser obtidos através de métodos analíticos, numéricos ou usando pacotes de simulação. A figura 5.4 ilustra respostas desse modelo à entrada degrau unitário para alguns valores de ζ. Nos sistemas de segunda ordem, quando maior o valor do fator de amortecimento, menor o máximo pico da resposta temporal do sistema, e o valor final amortece até o valor da entrada. Para $0 < \zeta < 1$ o sistema é dito subamortecido, apresentando duas raízes complexas conjugadas com partes reais negativas. Para $\zeta > 1$, o sistema é chamado de superamortecido, e para $\zeta = 1$ é classificado como criticamente amortecido. Nessas condições, as respostas não apresentam máximos picos, e as raízes ou pólos têm valores puramente reais negativos.

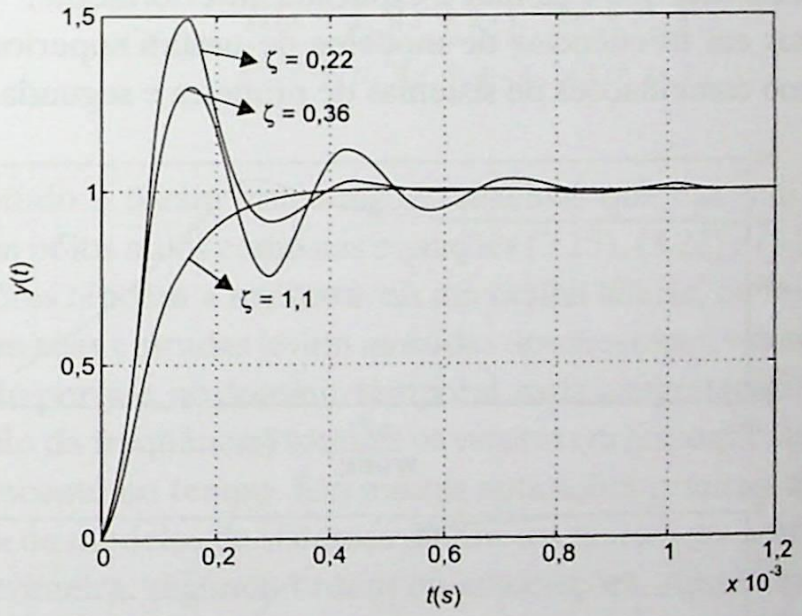


Figura 5.4 Respostas do modelo de segunda ordem do exemplo 5.2 para entrada degrau.

Com ζ tendendo a zero, a resposta do modelo tenderá a um comportamento oscilatório permanente, apresentando duas raízes puramente imaginárias. Quanto maior W_n menor o tempo de resposta do sistema. O pico máximo (Mp) e o tempo (Tp) correspondente podem ser calculados derivando a equação (5.4) e igualando-a a zero, obtendo-se:

$$Mp = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad ; \quad Tp = \frac{1}{W_n\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Respostas em freqüência (ou diagramas de Bode) de sistemas de segunda ordem também podem ser obtidas através de métodos analíticos, numéricos ou por meio de medidas experimentais de modo similar ao explicado no exemplo anterior. A figura 5.5 ilustra o diagrama de módulo e fase pela freqüência do modelo do exemplo 5.2. No domínio da freqüência, um sistema de segunda ordem apresenta as seguintes características: fase variando de 0° até –180°; na freqüência W_n (neste exemplo 22361 [rd/s]), a fase está em torno de –90°; e a partir dessa freqüência a curva de módulo tem uma inclinação de –40 [dB] por década de freqüência. Observa-se que para esse modelo, com $\zeta = 0{,}22$, ocorre uma ressonância na magnitude do módulo justamente na freqüência de ressonância. Para coeficientes de amortecimento iguais ou maiores que a unidade não ocorre ressonâncias, ou seja, a curva de módulo não ultrapassa o valor de 0 [dB]. A interpretação física da resposta em freqüência desse exemplo é similar à explicada anteriormente.

Respostas em freqüências de modelos de ordem superior podem ser expressas como combinações de sistemas de primeira e segunda ordem.

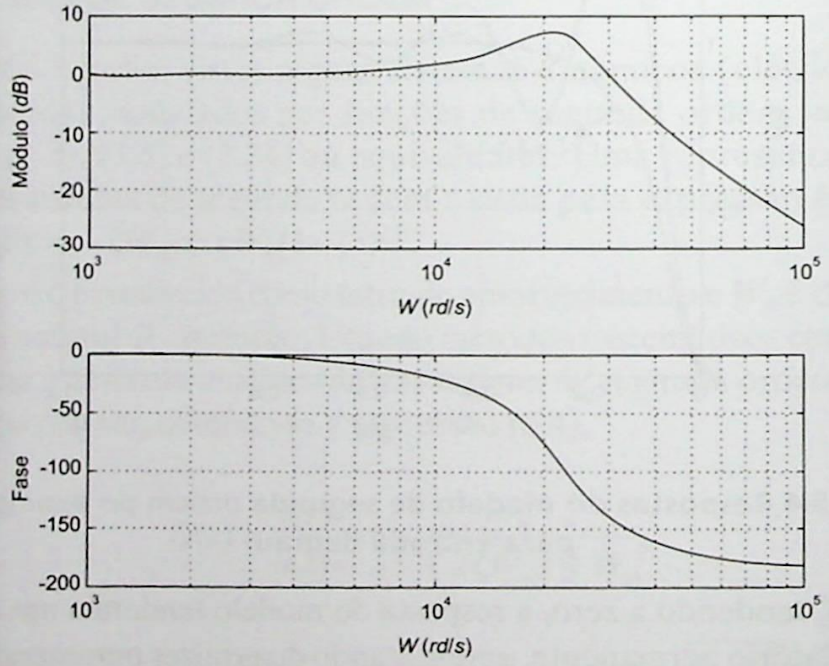


Figura 5.5 Resposta em freqüência de do modelo de segunda ordem do exemplo 5.2.

5.4 SISTEMAS DE ORDEM SUPERIOR E APROXIMAÇÕES

A função de transferência genérica de um modelo de sistema dinâmico pode ser expressa pela equação (5.5) ou por (5.6), onde p_k e z_k são os pólos e zeros respectivamente do modelo (que podem ser puramente reais ou complexos), e

s^q são eventuais pólos nulos. O número q de pólos localizados na origem denota o tipo do sistema. Essas funções de transferência podem ser resolvidas analiticamente ou através de métodos numéricos. Na prática, as funções de transferência podem representar modelos de sistema dinâmicos isolados que recebem a denominação de malha aberta, ou modelar sistemas de controle realimentados conhecidos como malha fechada, em que a função de um processo dinâmico faz parte da estrutura total do sistema. Essa classificação é usual em textos sobre sistemas de controle.

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} \ldots + a_{m-1} s + a_m} \tag{5.5}$$

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\ldots(s + z_m)}{s^q (s + p_1)(s + p_2)\ldots(s + p_r)} \tag{5.6}$$

No capítulo 3 foram vistos alguns sistemas que nas suas modelagens apresentaram pólos nulos como nas equações (3.15), (3.22) e (3.25). Sistemas com esses pólos tendem a ser instáveis em malha aberta, ou seja, excitações constantes em suas entradas levam as saídas dos mesmos a valores crescentes no tempo. Isto porque, no domínio temporal, cada integral (correspondente a $1/s$ no domínio da freqüência) totaliza os valores correspondentes de entrada de modo crescente no tempo. Em muitas aplicações práticas, as funções de transferência de modelos de sistemas dinâmicos podem ser aproximadas por funções de primeira, segunda ordem ou associações. Aproximações podem ser realizadas visando à modelos mais simples que requerem computações menos onerosas. Em geral, essas aproximações são realizadas, desprezando as raízes cujas partes reais negativas estejam mais distantes daquelas mais próximas da origem ou do eixo imaginário nas suas representações em coordenadas cartesianas. As raízes mais próximas da origem geralmente têm maiores influências na resposta dinâmica de um sistema e recebem a denominação de pólos dominantes.

EXEMPLO 5.3

Aproximação para um Modelo de Primeira Ordem. Seja a função expressa por (5.7) que possui dois pólos reais em –1 e –10. Como o segundo pólo está mais de cinco vezes distante do primeiro, pode ser desprezado, ou seja, despreza-se

a função de primeira ordem de menor constante de tempo, nesse exemplo, a de $\tau = 0{,}1$. Assim, a função expressa por (5.8) pode ser uma aproximação adequada para função original. A figura 5.6 ilustra as curvas das respostas das funções $G(s)$ e $G_a(s)$ a entradas degrau, nota-se que a aproximação adotada é boa, pois as curvas estão bem próximas.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s^2 + 11s + 10} = \frac{10}{(s+1)(s+10)} = \frac{1}{(s+1)(0{,}1s+1)} \tag{5.7}$$

$$G_a(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+1} \tag{5.8}$$

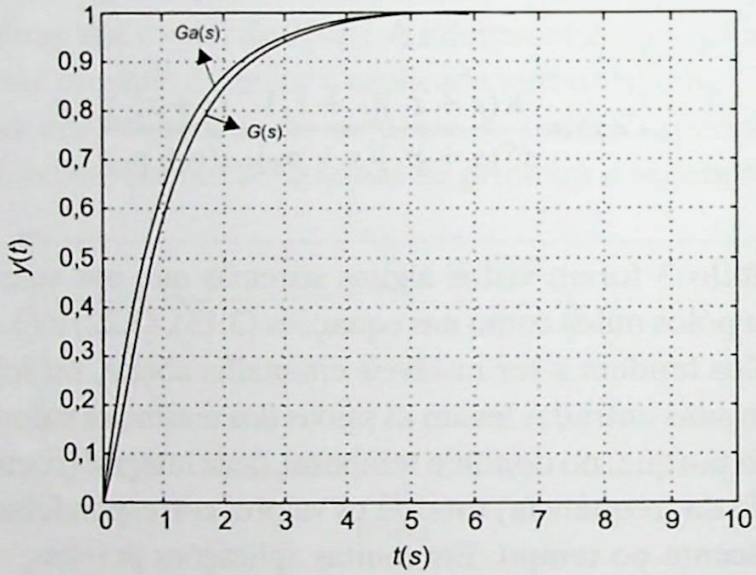


Figura 5.6 Respostas ao degrau das funções (5.7) e (5.8).

EXEMPLO 5.4

Modelo com duas raízes negativas próximas. Seja agora a função expressa por (5.9) que possui dois pólos reais em –1 e –2. O segundo pólo está próximo do primeiro e sua função de primeira ordem tem uma constante de tempo $\tau = 0{,}5$ da qual se tentara desprezar a raiz correspondente. Será usada a função (5.8) como tentativa de aproximação. Os gráficos na figura 5.7 são as respostas ao degrau unitário das funções citadas. Observa-se agora que a aproximação não é adequada, pois para $t = \tau = 1$ [s] o erro entre $G_a(s)$ e $G(s)$ está em torno de 23%, enquanto que na aproximação ilustrada na figura 5.6 o erro estava próximo de 5%. Portanto, o modelo da expressão (5.9) não pode ser aproximado adequadamente por uma função de primeira ordem.

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(0{,}5s+1)} \tag{5.9}$$

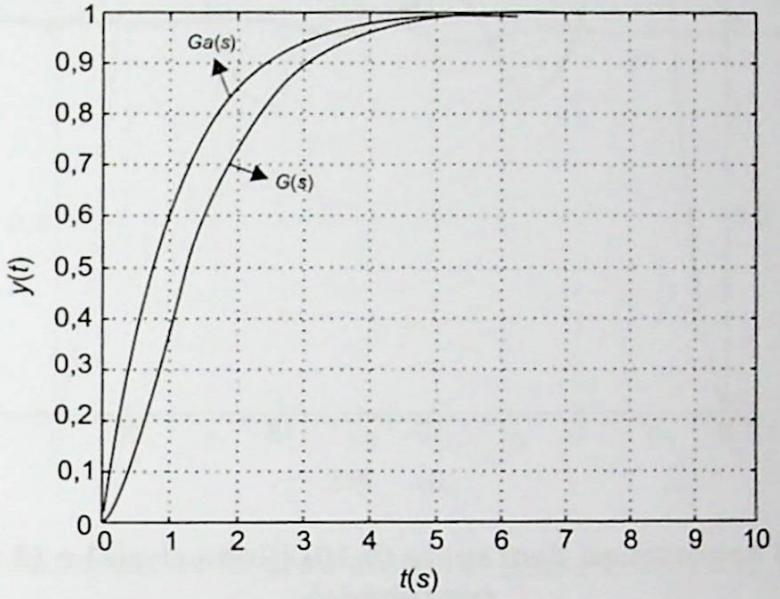


Figura 5.7 Respostas ao degrau das funções (5.8) e (5.9).

EXEMPLO 5.5

Aproximação para um Modelo de Segunda Ordem. A função (5.10) é o modelo de um sistema dinâmico que pode ser decomposto em uma função de primeira ordem e outra de segunda. As raízes do modelo são aproximadamente –20 e $-0{,}25 \pm j0{,}97$. Verificando as mesmas, nota-se que o valor da raiz da função de primeira ordem é bem maior que o valor das partes reais das raízes complexas da função de segunda ordem. Portanto, a de maior valor pode ser desprezada. A figura 5.8 ilustra as respostas à entrada degrau da função original e da aproximação expressa por (5.11). Verifica-se que a aproximação é adequada uma vez que as respostas estão bem próximas. Logo, esse modelo de terceira ordem pode ser aproximado adequadamente por uma função de segunda ordem.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{0{,}05s^3 + 1{,}025s^2 + 0{,}55s + 1} = \frac{1}{(0{,}05s+1)(s^2 + 0{,}5s + 1)} \tag{5.10}$$

$$G_a(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + 0{,}5s + 1} \tag{5.11}$$

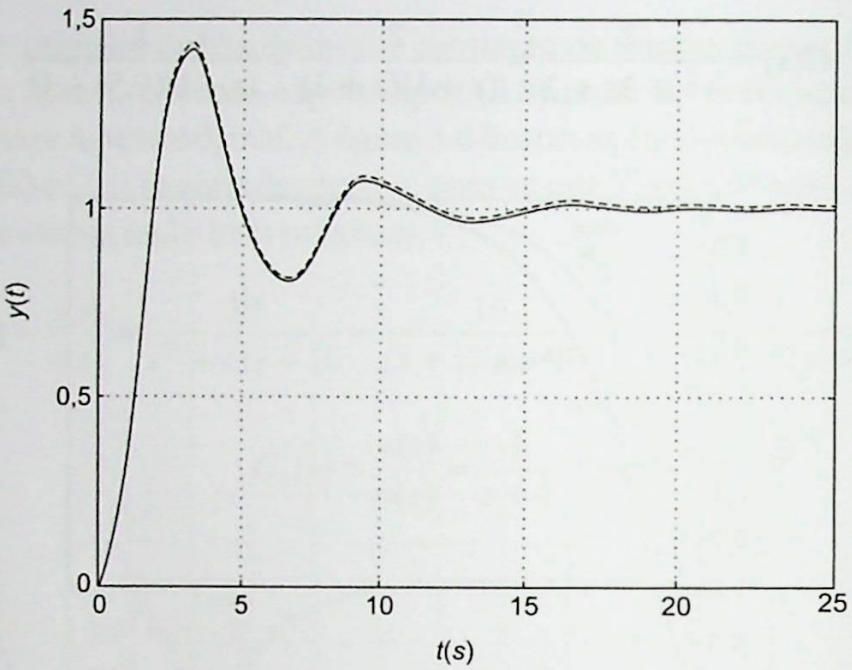


Figura 5.8 Repostas ao degrau de (5.10) [linha cheia] e (5.11) [linha pontilhada].

EXEMPLO 5.6

Aproximação de Modelo de Ordem Superior. A função (5.12) é o modelo de um sistema dinâmico e pode ser decomposta em duas funções de segunda ordem. Analisando as raízes resultantes $-2 \pm j9{,}8$ e $-0{,}25 \pm j0{,}97$, verifica-se que as partes reais das raízes complexas da parcela esquerda da função são maiores que a da direita, podendo assim serem descartadas. A figura 5.9 ilustra as respostas ao degrau da função original e a aproximada representada por (5.11). A aproximação é boa, pois as respostas estão bem próximas. Logo, esse modelo de quarta ordem pode ser aproximado por um de segunda. De maneira similar, outros sistemas de ordem superior podem ser analisados e aproximados, quando possível, por funções de transferência mais simples.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{100}{s^4 + 4{,}5s^3 + 103s^2 + 54s + 100} = \frac{100}{(s^2 + 4s + 100)(s^2 + 0{,}5s + 1)} \quad (5.12)$$

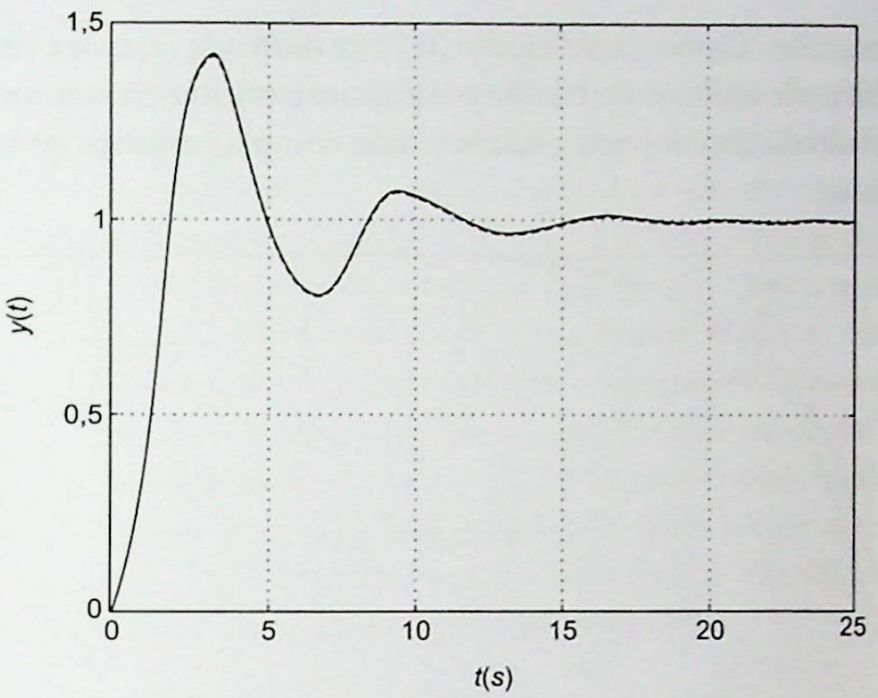


Figura 5.9 Repostas ao degrau de (5.12) [linha cheia] e (5.11) [linha pontilhada].

EXEMPLO 5.7

Aproximação de Modelo com um Pólo e um Zero. O modelo dado por (5.13) é de uma função com um pólo e um zero. Como a raiz (de valor –10) do numerador é dez vezes maior que a raiz (de valor –1) do denominador, a mesma pode ser desprezada, resultando na aproximação (5.8), dada apenas pelo pólo da função. A figura 5.10 ilustra as respostas da função original e da aproximada para entradas degrau unitário. Nota-se que as respostas são semelhantes, ou seja, neste caso, o zero da função pode ser desprezado. As raízes do numerador (denominadas de "zeros") não alteram estabilidade do sistema, podendo modificar conforme seus valores a resposta transitória do sistema.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(0{,}1s + 1)}{(s + 1)} = \frac{0{,}1s}{(s + 1)} + \frac{1}{(s + 1)} \qquad (5.13)$$

Uma outra forma de explicar a aproximação é verificando as frações da função (5.13). A parcela da direita é a aproximação adotada. A fração à esquerda é a anterior multiplicada por uma derivada (0,1s no domínio da freqüência). Para uma entrada degrau de valor constante, a derivada tende a zero, assim como o valor da saída dessa parcela (figura 5.11). Sendo a função original, a soma das duas frações, os valores resultantes são as contribuições,

das duas parcelas. Como o coeficiente (0,1) da derivada (s) é dez vezes menor que o coeficiente unitário da função básica, sua contribuição na soma é reduzida. O resultado da derivada pode ser visto como a resposta ao impulso da função básica.

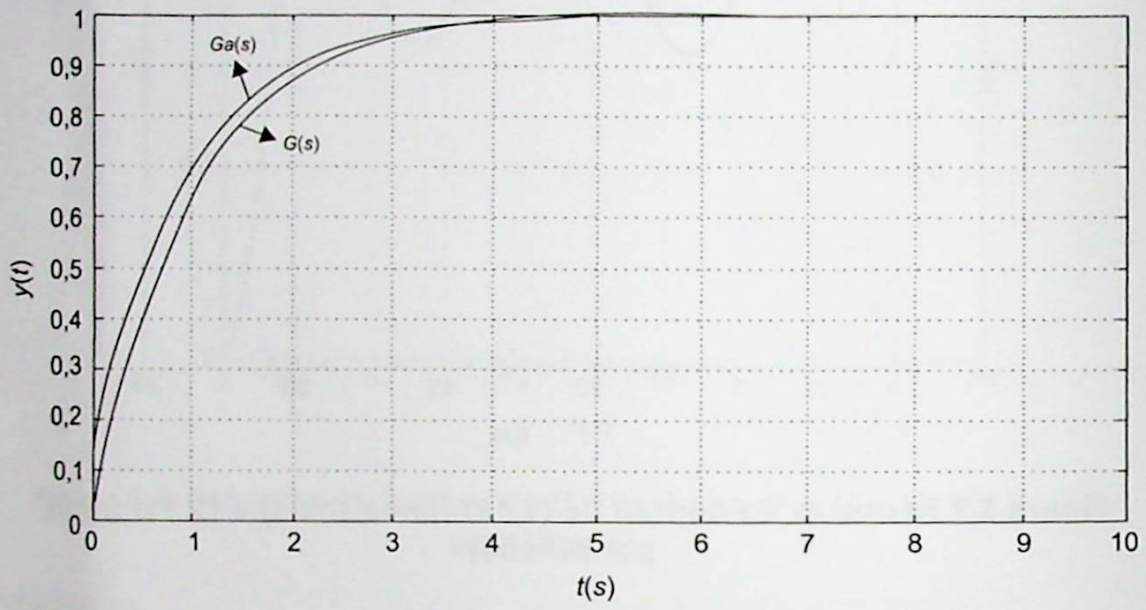


Figura 5.10 Respostas ao degrau das funções (5.8) e (5.13).

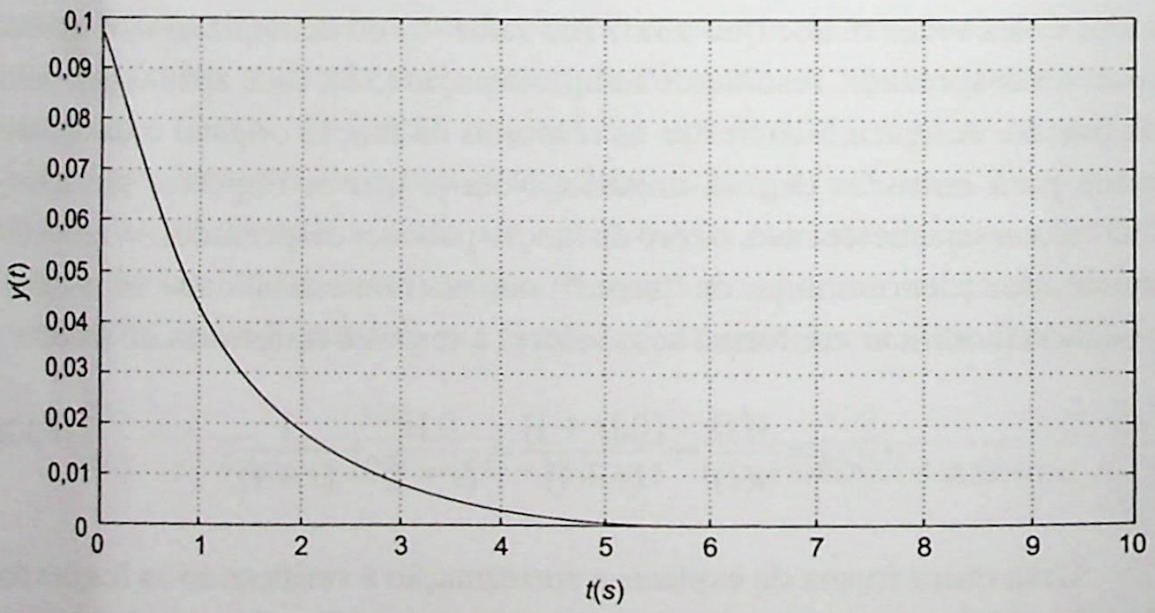


Figura 5.11 Resposta ao degrau da parcela $0,1s/(s+1)$.

EXEMPLO 5.8

Aproximação de Modelo com Pólos e Zeros. A função de transferência expressa por (5.14) tem zeros e pólos com raízes complexas em $-0,5\pm j3,12$ e $-0,25\ \pm j0,97$, respectivamente. A função original pode ser decomposta em três parcelas, onde as duas primeiras frações possuem termos de derivadas (os fatores $0,1s^2$ e $0,1s$ no numerador) da função (5.11) que pode ser uma possível aproximação. Como explicado no exemplo anterior, esses termos possuem coeficientes menores que a função básica e tendem a apresentar valores nulos nas suas saídas. Assim, a contribuição na soma da função original tende a ser pequena. A figura 5.12 mostra as respostas das funções (5.14) e (5.11) para entradas em degrau unitário. Nota-se que as mesmas são semelhantes, logo a aproximação proposta é adequada. Ou seja, os zeros da função original podem ser desprezados nesse exemplo.

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{(0,1s^2+0,1s+1)}{s^2+0,5s+1)}=\frac{0,1s^2}{(s^2+0,5s+1)}+ \tag{5.14}$$

$$+\frac{0,1s}{(s^2+0,5s+1)}+\frac{1}{(s^2+0,5s+1)}$$

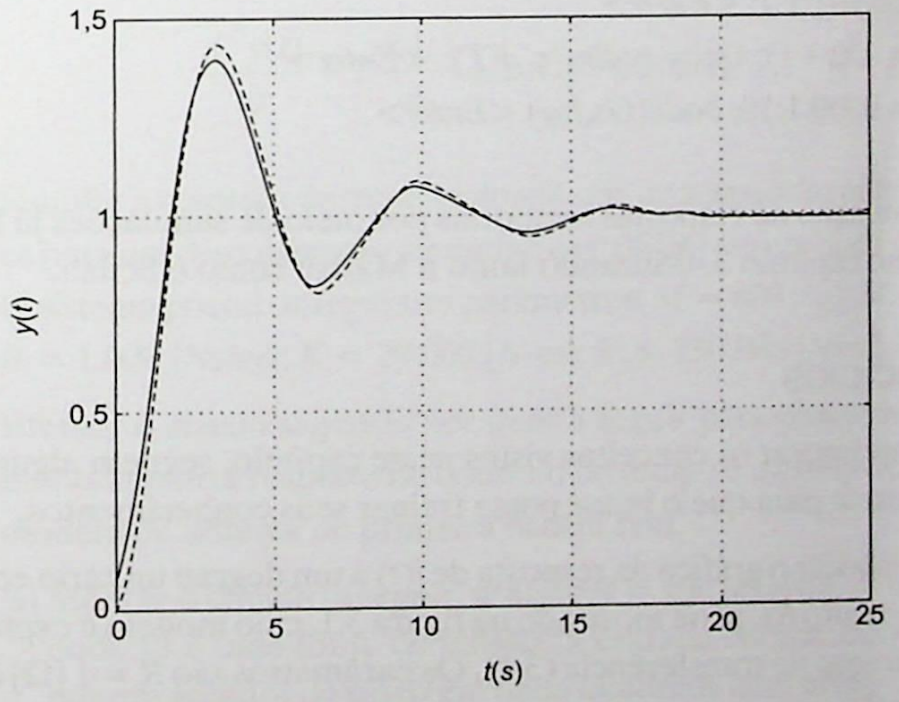


Figura 5.12 Respostas ao degrau das funções (5.14) [linha cheia] e (5.11) [linha pontilhada].

Nem sempre é possível reduzir a ordem de um modelo matemático de um sistema dinâmico ou utilizar aproximações básicas visando à obtenção de

funções de transferência de computações mais simples. Nessas condições, deve-se utilizar o modelo que seja mais adequado na reprodução das características essenciais do sistema estudado, conforme a precisão estabelecida ou desejada.

5.5 EXEMPLOS DE SIMULAÇÕES

Para uma determinada função de transferência, é fácil simular sua resposta em freqüência. Como ilustração, seja a função (5.1) do exemplo 5.1 com $K = 1$ e $\tau = 1$. Os comandos seguintes ilustram a obtenção do diagrama de Bode (semelhante à figura 5.2) por meio do *software* Matlab.

Num = 1; *Den* = [1 1]; <*Enter*>
bode(*Num, Den*) <*Enter*>

Os comandos abaixo ilustram a obtenção da resposta em freqüência do exemplo citado, utilizando agora o *software* Scilab.

s = *poly*(0,'s'); <*Enter*>
FT = 1/(*s*+1); *Gs* = *syslin*('c',*FT*); <*Enter*>
frq = 0.1:0.1:10; *bode*(*Gs,frq*) <*Enter*>

A obtenção de respostas temporais por meio de simulações já foi exemplificada no capítulo 3, utilizando tanto o Matlab como o Scilab.

5.6 EXERCÍCIOS

Visando aprimorar os conceitos vistos neste capítulo, seguem alguns exercícios propostos para que o leitor possa treinar seus conhecimentos.

1. Esboçar o gráfico da resposta de $i(t)$ a um degrau unitário em $v_a(t)$ do circuito *RL* série mostrado na figura 3.1, cujo modelo é expresso pela função de transferência (3.1). Os parâmetros são $R = 1$ [Ω] e $L = 0{,}1$ [*H*].
2. Para o circuito ilustrado na figura 3.2 e modelado pela equação (3.2), sendo $y = v_f$, $u = v_e$, $R = 10$ [$k\Omega$] e $C = 100$ [μF], traçar a resposta de $y(t)$ para uma entrada em degrau unitário. Esboçar também a resposta em freqüência do sistema.

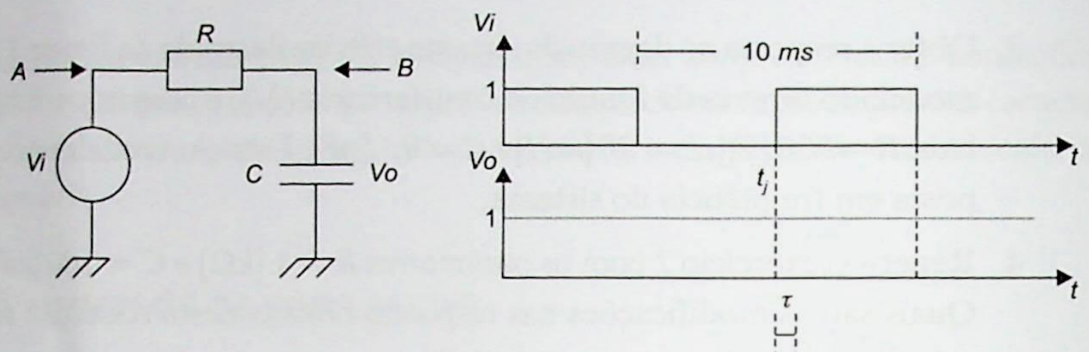
3. Obter a resposta ao degrau do sistema elétrico ilustrado na figura 3.2, modelado através da função de transferência (3.3) e com os parâmetros: $R = 330\ [\Omega]$, $L = 20\ [mH]$ e $C = 0{,}1\ [\mu F]$. Esboçar também a resposta em freqüência do sistema.
4. Repetir o exercício 2 com os parâmetros $R = 1\ [k\Omega]$ e $C = 100\ [\mu F]$. Quais são as modificações nas respostas obtidas nesta condição em relação aos parâmetros anteriores?
5. Obter uma função aproximada para função de transferência $G(s)$ abaixo. Esboçar os gráficos da função original e da aproximação, verificando se a mesma é adequada.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{500}{(s^2 + 60s + 500)}$$

6. Simular a resposta $y(t)$ ao degrau $u(t) = A.U_{-1}(t)$ de um sistema não-linear modelado pela expressão abaixo e com os seguintes valores de entrada $A = [0{,}1;\ 0{,}5;\ 1;\ 2]$.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)^3 = 10u(t)$$

7. Simular a resposta do modelo do sistema de suspensão automobilística para um descolamento repentino de 0,05 $[m]$ em um pneu do mesmo. O sistema possui os seguintes parâmetros: $M = 400\ [kg]$; $M_r = 50\ [kg]$; $B = 1\ 000\ [Ns/m]$; $K = 20\ 000\ [N/m]$; $K_p = 250\ 000\ [N/m]$.
8. Efetuar o ensaio sugerido nos itens a seguir para comprovar experimentalmente a resposta no domínio do tempo e da freqüência de um modelo de sistema de primeira ordem real.
   a) Montar o circuito a seguir, usando $R = 100\ [k\Omega]$ e $C = 0{,}033\ [\mu F]$, onde *Vi* é uma fonte de tensão (a entrada do sistema) fornecida por um gerador de sinais em onda quadrada com níveis de 0 e 1 $[V]$ e freqüência em 100 $[Hz]$. A tensão *Vo* é o sinal de saída, e sua forma de onda deve ser esboçada no gráfico a seguir, sendo medida por um osciloscópio que registrara os sinais de entrada e saída do sistema por meio das pontas A e B do instrumento.

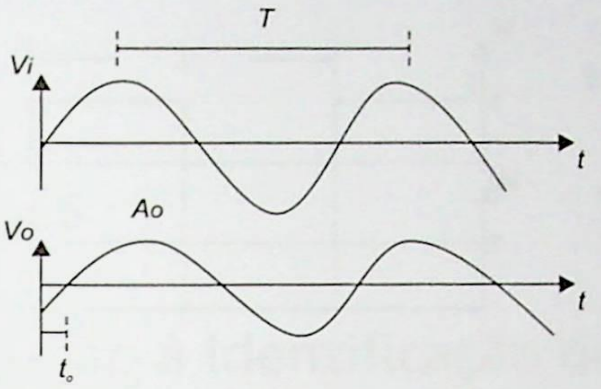


b) Qual o valor aproximado de *Vo* no tempo $t_j+\tau$ (onde $\tau = t = RC$)? Confere com a teoria?

c) Trocar o resistor *R* por outro de 22 [$k\Omega$]. Qual a mudança na resposta de *Vo*? Explicar.

d) Modificar a amplitude de *Vi* e verificar se *Vo* tem uma variação proporcional. Justificar.

e) Os ensaios dos itens anteriores ocorreram no domínio do tempo: *Vi*(*t*); *Vo*(*t*). Outra maneira de analisar respostas de sistemas dinâmicos é através do domínio da freqüência: *Vi*(*jW*); *Vo* (*jW*). Na função de transferência do circuito acima, modelado pela função de transferência $Vo\,(s)/Vi(s) = 1/(RCs+1)$, fazendo-se a substituição $s = jW$, tem-se a função do modelo no domínio da freqüência. A entrada (*Vi*) pode ser excitada por um gerador de sinais com onda senoidal (por exemplo, de amplitude 1 [*V*]) e freqüência variável. Anotar na tabela a seguir, medindo com um osciloscópio (canais *A* e *B*), os valores de amplitude e fase de *Vo* (ver ilustração a seguir das formas de onda típicas) para alguns valores de freqüência *W* do sinal de entrada *Vi*. As relações entre freqüência, período e fase estão indicadas. Uma das formas de representação de informações no domínio da freqüência é através de gráficos de fase e módulo *Md* (geralmente expresso em [*dB*], ou seja, $Md = 20.log(Ao/Ai)$). Com os dados da tabela resultante, construir gráficos de *Md* x *W* e *Fase* x *W* para representar a resposta em freqüência do sistema.



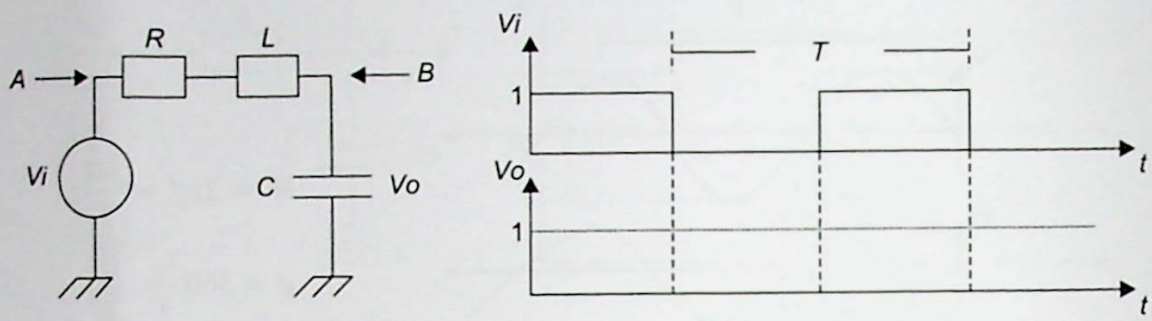
$$W = 2\pi f = \frac{2\pi}{T};$$

$$\varphi = 360\frac{t_o}{T}.$$

Tabela 5.2 Amplitude e fase

W [*rd/s*]	*f* [*Hz*]	*T* [*ms*]	t_o [*ms*]	φ [*grau*]	*Ao* [*V*]
100	16	62,80			
300	48	20,90			
500	80	12,6			
700	111	9,00			
900	143	7,00			
1 000	159	6,28			
3 000	477	2,10			
5 000	796	1,30			
7 000	1 114	0,90			
9 000	1 432	0,70			
10 000	1 592	0,63			

9. De maneira similar ao exercício anterior, pode-se ensaiar (ver esquema) um sistema de segunda ordem para comprovar experimentalmente sua resposta. Adotar valores adequados de R, L e C (semelhantes aos do exemplo 3) e anotar no gráfico a resposta temporal do sistema. Obter também a resposta em freqüência do circuito em um gráfico de módulo e fase pela freqüência.



5.7 REFERÊNCIAS

Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, 4ª ed., 2003.

Manuais do Matlab.

Manuais do Scilab.

Capítulo 6

Introdução à Identificação de Sistemas Dinâmicos

6.1 INTRODUÇÃO

A identificação de sistemas pode ser definida como a utilização de procedimentos numéricos que visam obter modelos de sistemas dinâmicos, a partir de medidas das suas entradas e saídas. No capítulo 3 foi mostrado como obter modelos matemáticos de sistemas dinâmicos, utilizando conceitos físicos da natureza dos mesmos, a chamada modelagem fenomenológica ou "caixa branca", em que geralmente, é necessário conhecer certas características ou propriedades físicas do sistema a ser modelado. Para sistemas complexos ou do tipo "caixa preta", nos quais não se tem acesso fácil das partes constituintes dos mesmos, pode ser oneroso obter a modelagem fenomenológica. Nesses casos, a utilização de métodos de identificação de sistemas facilita a obtenção de modelos de sistemas reais. Praticamente não é necessário conhecimento prévio do sistema, bastando se ter dados de medidas das suas entradas e saídas. A partir do processamento adequado dos dados medidos, obtêm-se os coeficientes ou parâmetros das equações que modelam o sistema em questão. Esta modelagem é conhecida como modelagem empírica ou "caixa preta". Mesmo para sistemas dinâmicos facilmente modelados fisicamente, o emprego de técnicas de identificação pode ser interessante em termos práticos, uma vez que modelos matemáticos podem ser obtidos de maneira relativamente rápida e precisa.

6.2 CONCEITOS BÁSICOS

Com o objetivo de mostrar as idéias básicas sobre identificação de sistemas, serão apresentados alguns conceitos necessários à compreensão deste tema.

- *Sistemas Contínuos*: São aqueles cujas variáveis apresentam alterações contínuas no tempo. Os sistemas dinâmicos geralmente possuem grandezas que variam continuamente no tempo. São modelados por meio de equações diferenciais, funções de transferência ou variáveis de estado contínuas, conforme já visto nos capítulos anteriores.
- *Sistemas Discretos*: Como as técnicas modernas de medição e amostragem de sinais são geralmente realizadas com equipamentos digitais, as variáveis de entrada e saída mensuradas em sistemas práticos estão em formato discreto no tempo. Os modelos resultantes são representados por equações a diferenças, com funções de transferências no domínio Z (ao invés do operador s de Laplace), ou por variáveis de estado discretas. A expressão (6.1) ilustra uma equação a diferenças genérica. T representa o tempo de amostragem das variáveis de entrada e saída do modelo, ou seja, o intervalo de tempo entre amostras consecutivas das informações. A variável independente (tempo) ocorre em intervalos discretos, ou seja, $t = kT$, onde $k = [0, 1, 2, 3, 4, ...]$. Por questões de simplificações, o tempo de amostragem pode ser omitido, como em (6.2).

$$\begin{aligned} y(kT) = &-a_1 y((k-1)T) - \ldots - a_n y((k-n)T) + \\ &+ b_0 u(kT) + b_1 u(((k-)T) + \ldots + b_m u((k-m)T) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m) \tag{6.2}$$

- *Modelo de Regressão*: Vários sistemas podem ser expressos matematicamente na forma conhecida como modelo de regressão, muito utilizado em várias áreas da ciência e engenharia. O conjunto de dados (φ), usado para obter a equação de um modelo, definido pelos seus coeficientes (θ), é chamado de regressor. Esse conjunto é constituído por pares de medidas de entrada e saída do sistema. Em relação à equação, (6.2) esse conjunto seria constituído de pares de valores como $[y(k-1)\ u(k-1)\ y(k-2)\ u(k-2)\ y(k-3)\ u(k-3)\ ...]$. O vetor (ou matriz) de coeficientes são os parâmetros do modelo $[a_1\ a_2 ...\ a_n\ b_0\ b_1 ...\ b_m]$. Na notação utilizada, o símbolo " ′ " denota uma matriz ou um vetor transposto, e o modelo de regressão típico é expresso por:

$$y(k) = \varphi_1(k-1)\theta_1 + \varphi_2(k-2)\theta_2 + \ldots + \varphi_n(k-n)\theta_n = \varphi'\theta,$$

$$\varphi' = [\varphi_1(k-1) \quad \varphi_2(k-2) \ldots \varphi_n(k-n)],$$

$$\theta = [\theta_1 \ \ \theta_2 \ldots \theta_n]'.$$

- *Modelos Básicos em Identificação de Sistemas*: Nos livros e artigos sobre identificação de sistemas, é usual a representação genérica de sistemas dinâmicos expressos por (6.3).

$$A(q)\,y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}\,u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\,v(k) \tag{6.3}$$

As entradas e as saídas dos sistemas modelados são representadas por $u(k)$ e $y(k)$, respectivamente. A variável $v(k)$ representa erros de medidas, imprecisões e ruídos que podem estar agregados a medições práticas. O operador q representa atrasos de transportes devido às amostragens das informações do sistema, decorrentes do intervalo de tempo entre amostras consecutivas. Os coeficientes dos modelos são expressos por:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{ny} q^{-ny};$$
$$B(q) = b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-nu};$$
$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + C_{nc} q^{-nc};$$
$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \ldots + d_{nd} q^{-nd};$$
$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \ldots + f_{nf} q^{-nf}.$$

Dependendo da estrutura do modelo utilizado, os mesmos podem ser classificados como: Modelo auto-regressivo com entradas externas (*ARX-Autoregressive with Exogenous Inputs*); Modelo auto-regressivo com média móvel e entradas externas (*ARMAX-Autoregressive Moving Average with Exogenous Inputs*); Modelo *Box-Jenkins*; e outros (para maiores detalhes, ver as referências bibliográficas). Existem outros tipos de modelos adequados a sistemas não-lineares como NARX, NARMAX, etc. Sistemas dinâmicos também podem ser representados por modelos de redes neurais artificiais ou por conjuntos de regras difusas que utilizem conjuntos nebulosos (*Fuzzy Sets*).

- *Estimador de Mínimos Quadrados*: Na determinação dos coeficientes/parâmetros dos modelos, freqüentemente empregam-se procedimentos baseado no método dos mínimos quadrados. Esse método é muito utilizado em várias áreas das ciências/engenharias e seu conceito básico será mostrado a seguir. Para um sistema representado na forma de uma tabela com N medidas, cujos dados são valores dos conjuntos de entradas/saídas anteriores φ' (os chamados regressores), deseja-se determinar os coeficientes θ de uma equação que represente o

sistema da maneira mais adequada possível. O erro ξ da aproximação obtida é minimizado conforme um critério quadrático J. As equações em (6.4) expressam a conceituação.

$$y(l) = \varphi(m)'\theta + \xi(m), \qquad (6.4)$$
$$J = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 = \xi'\xi.$$

Denotando F o vetor transposto dos regressores, E o vetor de erro e y os valores reais, tem-se a expressão de erro $E = y - Fq$. Dessa forma, a função de custo pode ser escrita como $J = [y - Fq]'[y - Fq]$. Desenvolvendo, obtém-se $J = y'y - 2q'F'y + q'F'Fq$. O vetor de coeficientes que minimiza a função de custo é obtido derivando J em relação a θ e igualando a expressão obtida a zero, resultando em $-2F'y + 2F'Fq = 0$. Assim, os valores estimados dos coeficientes da equação de modelagem são dados por

$$\theta = [F'F]^{-1} F'y. \qquad (6.5)$$

EXEMPLO 6.1

Aproximação de Funções. Sejam, por exemplo, as medidas de um transdutor cujos valores ensaiados são: $x = [1{,}1\ 2\ 2{,}95\ 4\ 5{,}1]'$; $y = [12{,}5\ 21\ 30\ 38{,}5\ 49{,}7]$. Fazendo um gráfico dessas medidas, verifica-se que o transdutor pode ser modelado por uma equação do tipo $y = Kx$. Uma estimativa grosseira para o parâmetro seria $K = 10$, mas este valor não necessariamente resultaria nos menores erros na estimação da função de modelagem. Usando o método dos mínimos quadrados, pode-se obter o valor do coeficiente que efetivamente minimiza os erros ou ruídos presentes nas medidas. Efetuando os cálculos, obtém-se $K = \theta = 9{,}8658$. Na figura 6.1, estão ilustrados os pontos das medidas do ensaio e o gráfico da função aproximada dada pelo ganho K calculado que modela o dispositivo. Nesse exemplo, o regressor (F) é o próprio vetor x. O valor obtido para o coeficiente é calculado diretamente através da equação (6.5), conforme ilustrado abaixo:

$$\theta = [x'x]^{-1} x'y = k = \frac{1{,}1.12{,}5 + 2.21 + 2{,}95.30 + 4.38{,}5 + 5{,}1.49{,}7}{1{,}1.1{,}1 + 2.2 + 2{,}95.2{,}95 + 4.4 + 5{,}1.5{,}1}.$$

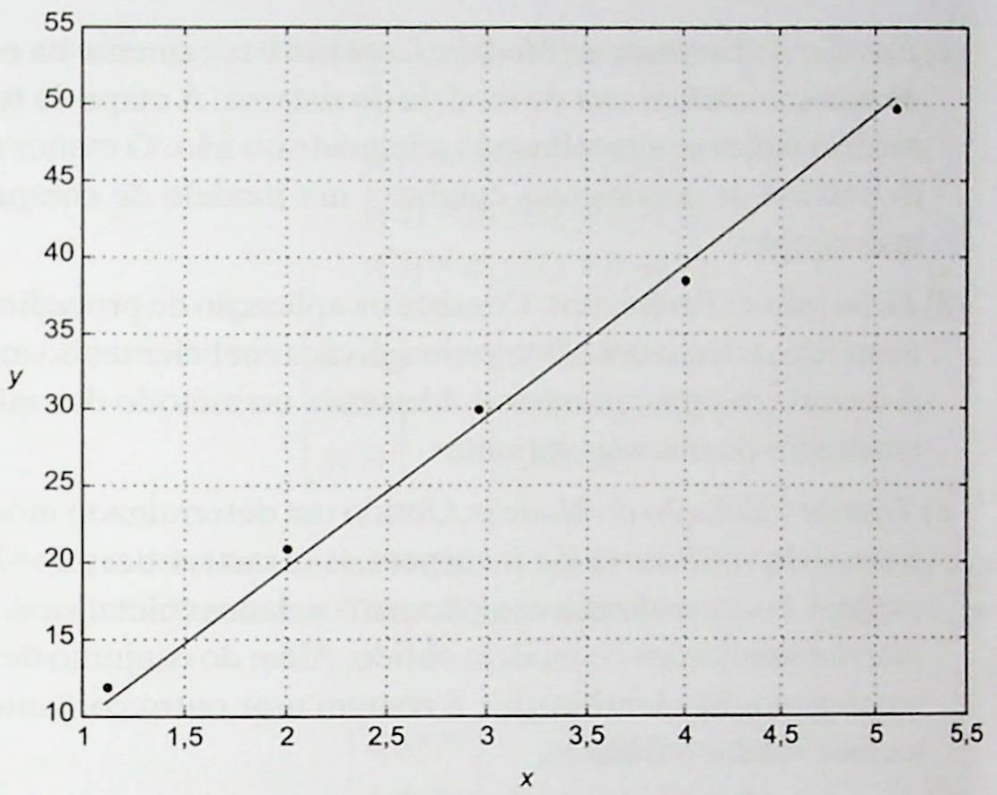


Figura 6.1 Exemplo de aproximação de função.

- *Procedimentos Básicos na Identificação de Sistemas Dinâmicos*: Os procedimentos para identificação de sistemas geralmente seguem algumas etapas que são indicadas a seguir:

  a) *Coleta de Dados*: Como os métodos de identificação resultam em modelos obtidos a partir de dados medidos de sistemas reais, o primeiro passo é adquirir esses dados. Isso pode ser realizado a partir de coletores de dados, sistemas de aquisição de dados ou através da própria instrumentação do processo/sistema a ser identificado, se a mesma for apropriada. Os tipos de sinais de excitação, tempo de amostragem e números de amostras mais adequados não serão tratados neste texto. O leitor pode encontrar essas informações nas referências bibliográficas citadas no final deste capítulo.

  b) *Escolha da Representação do Modelo*: Conforme as características do sistema a ser modelado, uma determinada estrutura de modelo (*ARX*, *ARMAX*, *Box-Jenkins*, etc.) pode ser mais adequada que outra (ver referências bibliográficas). Para sistemas lineares ou aproximadamente lineares e para sistemas com poucas variações em parâmetros no tempo, as estruturas *ARX* e *ARMAX* fornecem bons resultados de modelos.

c) *Escolha da Estrutura do Modelo*: Consiste basicamente na escolha do número coeficientes do modelo do sistema. A etapa de teste do modelo indica se a escolha está adequada ou não. O menor número possível de coeficientes conduz a um modelo de computação mais simples.

d) *Estimação de Parâmetros*: Consiste na aplicação de procedimentos numéricos adequados a determinação dos coeficientes do modelo. A maioria dos procedimentos é baseada no método dos mínimos quadrados ou nas suas variantes.

e) *Teste de Validação do Modelo*: Obtido um determinado modelo, é necessário verificar se ele incorpora as características do sistema original. Isso é realizado comparando os dados coletados do sistema com simulações do modelo obtido. Além do conjunto de dados empregados na identificação, é comum usar outro conjunto para melhor validar o modelo.

EXEMPLO 6.2

Exemplo de Identificação de um Sistema Dinâmico. Este exemplo vai mostrar como usar os conceitos anteriores para obter um modelo de um sistema dinâmico. A tabela 6.1 mostra alguns pontos de medidas da entrada e saída de um determinado sistema. Será feita uma tentativa de um modelo mínimo, logo, a equação (6.2) será reduzida a (6.6). Usando três amostras da tabela, tem-se a seguinte seqüência de dados e, conseqüentemente, os vetores/matrizes para regressão expressos por (6.7). É possível calcular os coeficientes do modelo, usando a equação (6.5) e uma calculadora que opera com matrizes, ou ainda *softwares* específicos para microcomputadores.

Tabela 6.1 Alguns valores de entrada e saída de um sistema

$u(k)$	$y(k)$
0,2	0,0095
0,3	0,0277
0,4	0,0536
0,5	0,0866
0,6	0,1259
0,7	0,1711

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= a_1 y(0) + b_1 u(0); \\ y(2) &= a_1 y(1) + b_2 u(1); \\ y(3) &= a_1 y(2) + b_2 u(2). \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix}; \; F = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ y(2) & u(2) \end{bmatrix}; \; \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Aqui, as amostras iniciais da tabela (para $k = 0$) foram definidas como sendo a primeira linha da mesma. Os coeficientes obtidos são $a_1 = 0{,}9032$ e $b_1 = 0{,}0954$ a partir de:

$$y = \begin{bmatrix} 0{,}0277 \\ 0{,}0536 \\ 0{,}0866 \end{bmatrix}; \; F = \begin{bmatrix} 0{,}0095 & 0{,}2 \\ 0{,}0277 & 0{,}3 \\ 0{,}0536 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Os dados da tabela 6.1 foram obtidos com um tempo de amostragem de $T = 0{,}1$ segundos. Na etapa de teste do modelo, é melhor realizar o procedimento com uma outra tabela de dados ou conjunto de informações para validar o mesmo. Simulando o modelo obtido para uma entrada degrau e comparando com dados medidos no sistema real, têm-se os gráficos da figura 6.2. É fácil notar que os valores estão bem próximos, confirmando que o modelo obtido está adequado. A Listagem 6.1 ilustra o pseudocódigo de um programa para simular a resposta do modelo obtido para uma entrada em degrau unitário.

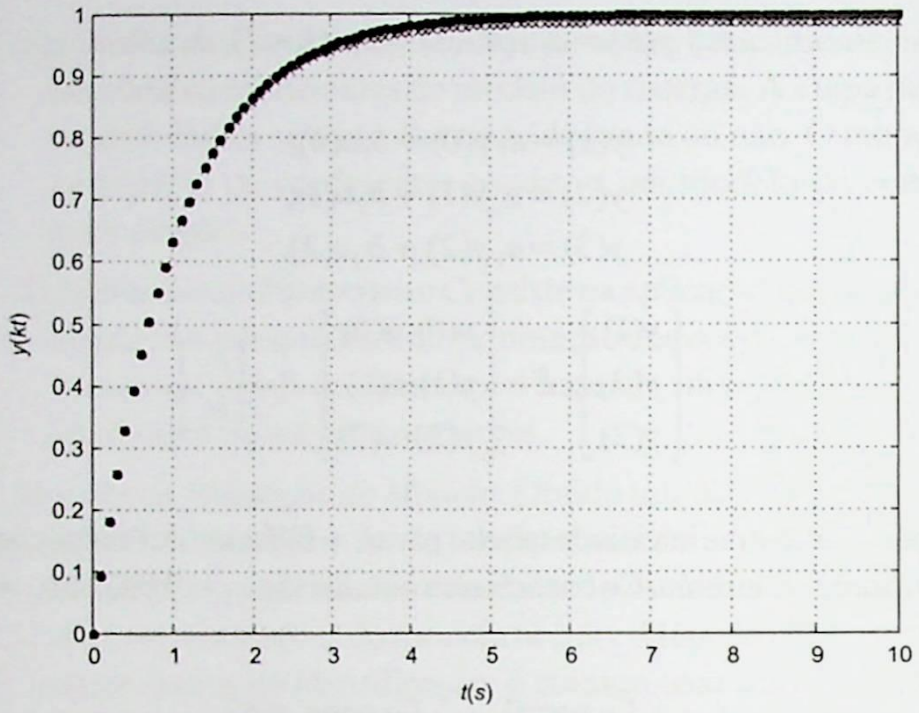


Figura 6.2 Dados medidos = "." ; Dados do modelo simulado = "*x*".

LISTAGEM 6.1

```
Pseudo-Código para Simulação da equação (6.6)
//Valores de parâmetros e variáveis:
a1=0.9032; b1=0.0954; T=0.1; tf=10; vy(100); vt(100);
yk=0; yk_1=0; uk_1=0; t=0; n=0;
Faça //Loop de repetição:
    uk=1;//Entrada de excitação do sistema: degrau unitário.
    yk = a1*yk_1 + b1*uk-1;  //Equação a diferenças.
    yk_1 = yk; uk_1 = uk;  //Atualização das variáveis.
    vy(n) = yk; //Armazena valor da variável y em um vetor.

    vt(n) = t; //Armazena valor da variável t em um vetor.
    t = t + T; //Incremento da variável independente.
    n = n + 1; //Incremento da variável de indexação.
Enquanto(t <tf);

Plotar(vt,vy); //Traçar gráfico da simulação de y(t).
//Final do código.
```

Usando tabelas de transformada Z ou funções de conversão é possível obter a função de transferência do modelo contínuo resultante, que é dada por (6.8). Este texto não abordara o conceito de transformada Z nem de funções de

conversão. Estas informações podem ser encontradas nas referências bibliográficas citadas no final deste capítulo.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Ns}{Ds} \cong \frac{0{,}985}{s+1} \tag{6.8}$$

EXEMPLO 6.3

Identificação de Sistemas Dinâmicos. Em medições práticas o conjunto de dados necessários para a identificação de um sistema dinâmico pode ser extenso. A montagem manual das matrizes/vetores do modelo de regressão e a computação dos dados para a estimação dos parâmetros da representação poderá ser uma tarefa enfadonha. Existem softwares específicos que facilitam essa tarefa. A figura 6.3 ilustra as informações de entrada e saída coletadas em um ensaio do sistema do exemplo anterior. Essas informações são provenientes de arquivos ou tabelas/planilhas de medidas reais. Neste exemplo foram utilizadas mil amostras com um tempo de amostragem de 0,01 segundos. O sinal de entrada foi um pulso unitário que iniciou em cinco segundos e cessou em cinco segundos e meio. Para a identificação é possível escolher as amostras entre cinco até nove segundos, ou seja, as amostras de número 500 até de 900, respectivamente.

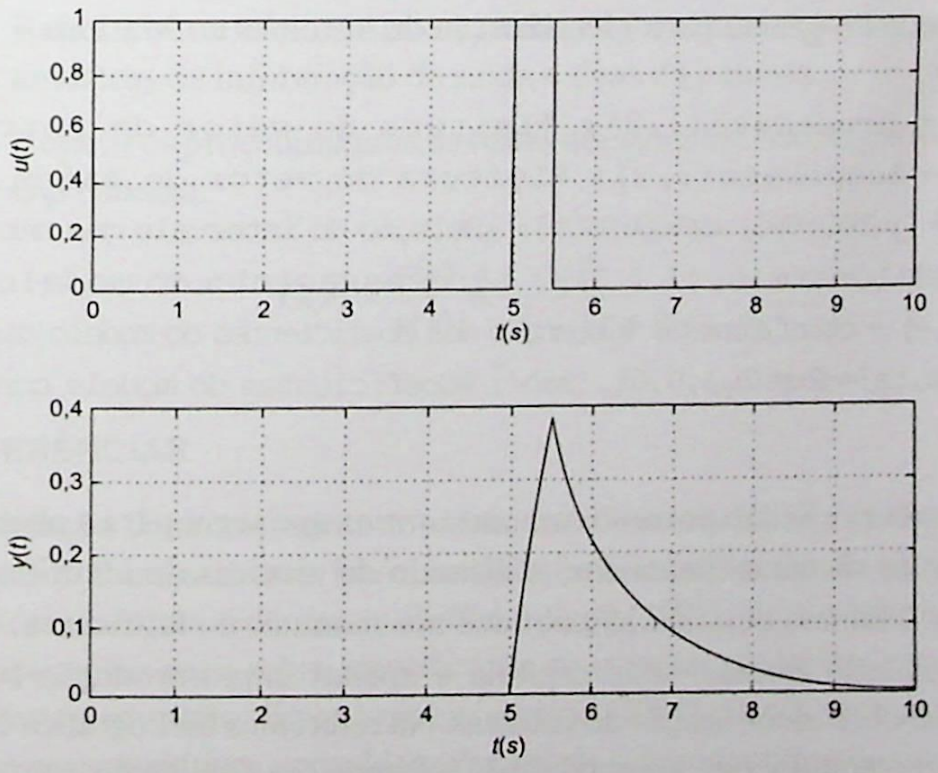


Figura 6.3 Exemplo de dados reais de um sistema dinâmico.

Supondo que os dados da entrada (u) e da saída (y) das medidas do sistema estejam gravadas em um arquivo de dados denominado *ScopeData*, os comandos (listagem 6.2) ilustrados a seguir do *software* Matlab, podem ser utilizados para obter um modelo *ARX*. O comando *arx* gera o modelo a partir dos dados de entrada e saída do sistema, os valores entre colchetes representam respectivamente os números de coeficientes (a_n e b_m) e atrasos de transporte entre as amostras consecutivas da representação do modelo. O comando *th2tf* retorna os coeficientes da equação a diferenças da modelagem. O comando *d2cm* converte o modelo para a forma contínua. Os resultados deste exemplo seriam:

$$b = [b_0\ b_1] = [0\ 0{,}01];\ a = [1\ a_1] = [1\ -0{,}99];\ Ns = 1;\ Ds = [1\ 1].$$

Os valores obtidos para o modelo discreto foram diferentes do exemplo anterior devido ao tempo de amostragem ser outro. Já os valores para o modelo contínuo correspondente foram bem parecidos.

Para o *software* citado, existem outros comandos e bibliotecas (*toolboxes*) específicas para identificação de sistemas dinâmicos que não serão abordados neste texto. Para maiores informações, os leitores podem consultar os manuais ou o site do fabricante.

LISTAGEM 6.2

Exemplo de Programa para Identificação de Sistemas no MatLab.

```
u = ScopeData(:,2); %Leitura do vetor de entrada.
y = ScopeData(:,3); %Leitura do vetor de saída.
v = [y(500:900) u(500:900)]; %Seleção do intervalo das amostras.
modelo=arx(n,[1 1 1]); %Processamento do modelo ARX.
[b,a] = th2tf(modelo) %Obtenção dos coeficientes do modelo discreto.
[Ns,Ds]=d2cm(b,a,0.01,'zoh') %Coeficientes do modelo contínuo.
```

O *software* Scilab possui o comando *armax* que serve para a obtenção de modelos de sistemas dinâmicos, utilizando de técnicas de identificação de sistemas. Maiores detalhes são obtidos nos manuais do fabricante.

O assunto tratado neste capítulo é apenas uma introdução básica de conceitos sobre identificação de sistemas. Na referência bibliográfica citada no final deste capítulo, o leitor encontrará informações detalhadas sobre o tema em questão.

O último item desse capítulo traz alguns exercícios para o leitor treinar os conhecimentos adquiridos.

6.3 EXERCÍCIOS

1. Repetir o exemplo 6.2, utilizando agora os últimos conjuntos de dados da tabela 6.1.
2. Repetir o exemplo 6.2, utilizando agora o modelo,

$$y(k) = a_1y(k-1)+a_2u(k-2) +b_1y(k-1)+b_2u(k-2).$$

3. Realizar a simulação da listagem 6.1, utilizando uma linguagem de programação ou algum *software* de simulação.
4. Simular o sistema $G(s)$ abaixo e, utilizando dos dados obtidos, realizar a identificação de um modelo discreto com uma estrutura que tenha uma amostra anterior da informação de saída do sistema, e outra da entrada de excitação do mesmo.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10}{s^2 + 11s + 10}$$

5. Repetir o exercício anterior, usando agora uma estrutura com duas amostras da informação de saída e duas da entrada.
6. Repetir os procedimentos das duas questões anteriores para a função $G(s)$ abaixo.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

6.4 REFERÊNCIAS

A conceituação de amostragem de sinais, transformada Z, representações em equações a diferenças e uma breve introdução à identificação de sistemas são encontradas de forma didática em *Phillips e Nagle* (1995). Teoria básica e exemplos de aplicações reais sobre identificação de sistemas dinâmicos em texto na língua portuguesa estão disponíveis em *Aguirre* (2004). Fundamentos teóricos, justificativas matemáticas e considerações gerais sobre identificação de sistemas são encontrados em detalhes em *Ljung* (1999). O *help* e os manuais do usuário do

software MatLab apresentam, além de detalhes das funções específicas e exemplos de aplicações em identificação de sistemas, um tutorial básico sobre o assunto.

Aguirre, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, 2004.

Ljung, L. *System Identification*: Theory for the User. Prentice Hall, 1999.

Phillips, C. L., Nagle, H. T. *Digital Control System Analysis and Design*. Prentice Hall, 1995.

Manuais do Matlab.

Manuais do Scilab.

Anexo 1

Algumas Propriedades da Transformada de Laplace

1: $£[c.f(t)] = c.F(s)$

2: $£[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$

3: $£[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

4: $£[\int f(t)dt] = s^{-1}F(s) - s^{-1}[\int f(t)dt]_{t=0}$

5: $f(\infty) = \lim[f(t)]_{t\to\infty} = \lim[sF(s)]_{s\to 0}$

Anexo 2

Algumas Transformadas de Laplace

1: $U_0(t) \Leftrightarrow 1$

2: $U^{-1}(t)s \Leftrightarrow {}^{-1}$

3: $t \Leftrightarrow s^{-2}$

4: $e^{-at} \Leftrightarrow (s+a)^{-1}$

5: $(1-e^{-at}) \Leftrightarrow s^{-1}(s+a)^{-1}$

6: $\sin(Wt) \Leftrightarrow W(s^2+W2)^{-1}$

7: $\cos(Wt) \Leftrightarrow s(s^2+W2)^{-1}$

8: $1-\cos(wt) \Leftrightarrow W^2 s^{-1}(s^2+W^2)^{-1}$

9: $W(1-\zeta^2)^{-1/2} e^{-\zeta Wt} \sin((1-\zeta^2)^{1/2} Wt) \Leftrightarrow W^2(s^2+2\zeta Ws+W^2)^{-1}$

10: $1-W(1-\zeta^2)^{-1/2} e^{-\zeta Wt} \sin((1-\zeta^2)^{1/2} Wt+\theta) \Leftrightarrow W^2 s^{-1}(s^2+2\zeta Ws+W^2)^{-1}$;
$\theta = tam-1(\zeta^{-1}(1-\zeta 2)^{1/2})$.

Índice Remissivo

A
Álgebra Linear, 9
Algoritmo de Routh-Hurwtiz, 96
Amplificador Hidráulico, 57
Análise da Resposta, 6
Análise, Técnicas de, 87
Aproximação de Padé, 63
Atraso de Transporte, 62
Atrito, 1, 42, 118
Aproximação Linear, 51
Autovalores e Autovetores, 12

B
Bode, Diagrama de, 135, 140
Box-Jenkins, 155

C
Caixa Branca, 153
Caixa Preta, 153
Cálculo de Autovalores e Autovetores, 13
Classificação de Sistemas, 3
Capacitância Hidráulica, 54
Capacitância Térmica, 58
Coeficientes, 11, 26, 35
Compensadores, 38, 39, 66
Condições Iniciais Não-Nulas, 77
Condutância, 37
Confirmação da Decomposição, 18
Constante de Tempo, 133
Controladores Eletrônicos, 66
Controlador PI, 67
Controlador Derivativo, 67, 68
Crescimento Populacional, 23

D
Decomposição de Matrizes, 15
Determinante de uma Matriz, 17
Diagramas de Blocos, 74, 75, 77, 78, 79
Diagrama de Bode, 135, 140
Dissipação de Energia, 122
Distância Euclidiana, 10

E
Energia, 70, 108, 118, 119, 120, 126
Equações Diferenciais, 21, 78
    Primeira Ordem, 22
    Definições Fundamentais, 22
    Introdução, 21
    Solução, 22
Equações Numéricas, 79
Equivalências entre Diagramas de Blocos, 74
Estabilidade, 96, 100, 104, 119, 145
Estimador de Mínimos Quadrados, 155
Exemplos de Simulações, 80
Exercícios, 33, 81, 127, 148, 163

F
Fator de Amortecimento, 138
Fase, 135
Fatoração LU, 19
Ferramentas Computacionais, 4
    Matlab e Scilab, 4

Freqüência, 135
de Corte, 135
de Ressonância, 140
Fricção Rotacional, 48
Força de Amortecedor, 42
Força de Atrito Viscoso, 42
Força de Mola, 42
Frações Parciais, 90
Uso do Matlab, 92
Função de Transferência, 37, 87
Estritamente Própria, 87
Forma Fatorada, 88
Frações Parciais, 90
Própria, 87
Imprópria, 87, 89
Função Não-Linear, 51

G
Ganho, 133
Geração Elétrica, 70
Geradores, 70

H
Hidráulica, Capacitância, 54
Hidráulica, Resistência, 54
Hidráulicos, Sistemas, 54

I
Identificação de Sistemas, 153
Aproximação de Funções, 156
ARX, 155
ARMAX, 155
Comandos para Identificação, 162
Conceitos Básicos, 153
Equações a Diferenças, 154
Introdução, 153
Modelo de Regressão, 154
Obtenção de Modelo, 161
Simulação de Modelo, 160
Sistemas Contínuos, 154
Sistemas Discretos, 154
Indutância, 7
Introdução à Modelagem, 35
Inércia, 47

L
Laminadores, 68
Lei de D'Alembert, 41, 47
Lei de Kirchhoff, 37
Lei de Lenz, 36
Leis de Newton, 41
Lei de Ohm, 36
Linguagens de Programação, 75
Linha de Transmissão, 38, 71
Lotka-Volterra, Modelo de, 24
Lyapunov, Método de, 118
Definição de Estabilidade, 119
Estabilidade Assintótica, 122
Função para Sistema Linear, 123
Método da Primeira Integral, 126
Teorema da Estabilidade, 121

M
Matlab, 4
Máquinas Ferramentas, 68
Matriz de Funções de Transferência, 56
Matriz Singular, 19
Matrizes, 11
Inversa e Fatoração de, 19
Propriedades da Multiplicação, 18
Regra de Schur, 18
Máximo Pico, 139
Método Direto de Lyapunov, 118
Modelagem de Sistemas Elétricos, 36
Circuito RL, 37
Circuito RC, 38
Circuito RLC, 38
Circuito de Avanço/Atraso, 39
Modelagem Empírica, 153
Modelagem Fenomenológica, 153
Modelagem de Sistemas Mecânicos, 41
Sistema Massa-Atrito, 42
Sistema de Amortecimento, 43
Modelo mais Detalhado, 44
Modelagem do Circuito, 6
Modelagem, O Problema da, 1
Por Variáveis de Estado, 106
Modelos Básicos em Identificação, 155
Módulo, 135
Motores de Corrente Contínua, 69

N
NARX, 155
NARMAX, 155
Não-Paramétrico, Modelo, 135
Número Complexo, 135

O
Obtenção de Autovalores, 17

P
Planta Química, 61
Parâmetros, 35
Pólos, 139, 141, 147
Programas, 134
Pseudocódigo, 78, 79

Q
Químico, Reator, 64
Química, Planta, 61

R
Reatâncias, 39
Reator Químico, 64
Redundância no Equacionamento, 115
Referências, 34, 85, 131, 152, 163
Representação no Plano S, 88
Representações em Diagramas, 73
Resistência, 7
Resistência Hidráulica, 54
Resistência Térmica, 58
Ressonância, 140
Resposta
  em Freqüência, 136
  Livre, 3
  Forçada, 3
  Total, 3
Respostas Típicas de Modelos, 133
  Sistemas de Primeira Ordem, 133
  Sistemas de Segunda Ordem, 138
  Sistemas de Ordem Superior, 140
  Resposta ao Degrau, 94, 95
  Resposta ao Impulso, 94, 96
  Respostas Típicas, 138
Revisões Fundamentais, 9
Robôs, 49, 52
Routh-Hurwtiz, Algoritmo de, 96

S
Siclab, 4
Simulações, 80
Sistemas Diversos, 66
  Controladores Eletrônicos, 66
  Controlador PI, 67
  Controlador Derivativo, 67
  Geração Elétrica, 70
  Servo-Motor Elétrico, 68
  Transdutores, 73
Sistemas Hidráulicos, 54
  Nível, 54
  Servo-Pistão Hidráulico, 57
  Tanques Acoplados, 55
Sistemas Químicos, 60
  Coluna de Destilação, 61
  Reator Químico, 64
Sistemas Térmicos, 58
  Aquecimento, 58, 60
Série de Taylor, 51
Sistemas Rotacionais, 47
  Sistema Inércia-Atrito, 48
  Mecanismo de posicionamento, 49
  Pêndulo Mecânico, 50
  Transmissão-Mecânica, 52
Solução do Sistema de Equações, 6
Suspensão Ativa, 46

T
Técnicas de Análise, 87
  Calculando os Resíduos, 90
  Determinação da Estabilidade, 96
  Introdução, 87
  Forma Fatorada, 88
  Desmembramento, 89
Tempo de amostragem, 154
Transdutores, 73
Transformada de Laplace, 26
  Constante, 27
  Degrau, 30
  Exercícios, 33
  Exponencial Crescente, 27
  Propriedades Fundamentais, 29
  Rampa, 31
  Referências, 34
  Seno, 27
Turbinas, 70

V
Variáveis e Equações de Estado, 32
Variáveis Modais, 112
  em Matlab e Scilab, 115
Variáveis Dinâmicas Contínuas, 2
Vetores, 9

Z
Zeros,145, 147

Antonio Carlos Zambroni de Souza

Engenheiro Eletricista (Ênfase em Sistemas de Potência) pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) em 1987. Mestre em Sistemas de Potência pela PUC-RJ em 1990. Doutor em Engenharia Elétrica pela University of Waterloo Canadá em 1995 e Professor Visitante na University fo Wisconsin Madison, em 2000. Professor na Escola Federal de Engenharia de Itajubá (atual Universidade Federal de Itajubá) desde 1995. Trabalha nas áreas de Estabilidade de Sistemas de Potência, Mercados de Energia Elétrica e Sistemas de Controle.

Carlos Alberto Murari Pinheiro

Engenheiro Eletricista (Ênfase Eletrônica) pela Escola Federal de Engenharia de Itajubá (EFEI). Mestre em Sistemas de Potência pela EFEI. Doutor em Sistemas de Controle pela Universidade Estadual de Campinas. Professor na Escola Federal de Engenharia de Itajubá (atual Universidade Federal de Itajubá) desde 1983. Trabalha nas áreas de Sistemas de Controle, Processamento Digital de Sinais, Modelagem e Identificação de Sistemas Dinâmicos, Eletrônica de Potência e Inteligência Artificial Aplicada.

Introdução a Modelagem, Análise e Simulação de

Sistemas Dinâmicos

Este livro se propõe a ocupar um espaço importante na formação dos alunos de vários cursos de Engenharia. Conceitos fundamentais sobre Sistemas Dinâmicos são essenciais para o entendimento adequado de tópicos relacionados com a modelagem, a análise, o controle e a estabilidade de sistemas dinâmicos em geral.

Neste aspecto, o livro é endereçado aos alunos de graduação que entram em contato com o tema pela primeira vez e, aos alunos de pós-graduação que visam uma revisão do material estudado.

Os autores buscaram uma abordagem pedagógica e de fácil entendimento, na qual procurou-se englobar em único livro, assuntos geralmente disponíveis em obras diversos na literatura.

São abordados no texto temas diversos, tais como: revisão de conceitos básicos sobre equações diferenciais; Transformadas de Laplace; variáveis de estado; análise modal; modelagem fenomenológica de sistemas dinâmicos; critérios de estabilidade; respostas típicas de sistemas dinâmicos e identificação de sistemas.

Quanto ao uso de pacotes computacionais, o livro emprega dois programas com ferramentas úteis à área estudada. Estes programas são o Matlab©, largamente empregado em livros acadêmicos recentes, e também o Scilab, de acesso gratuito na Internet e não muito explorado na literatura.

ISNB 978-85-7193-188-6

9 788571 931886